ETH Zürich, Frühling 2024
Dozent: Prof. Dr. Vincent Tassion Übungsorganisator: Jakob Heiss

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 4

Version 2 (22. März 2024: Hinweis zu Aufgabe 4.1 entfernt und winzige Verbesserungen an der Formatierung.), Version 1 (21. März)
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **26. März** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **28. März 8:00**. Nachher kann selbstständig mit der Lösung verglichen werden.

Aufgabe 4.1 Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf $\Omega = \{0,1\}^n$ mit $\mathrm{P}(\cdot) = \frac{|\cdot|}{2^n}$. Wir definieren n Zufallsvariablen $Z_i(\omega) := \omega_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Somit sind diese Zufallsvariablen u.i.v. (im englischen i.i.d.) und erfüllen $\mathrm{P}(Z_i = 1) = \mathrm{P}(Z_i = 0) = \frac{1}{2}$.[1]

(a) Wir definieren eine weitere Zufallsvariable

$$X := \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

(i) Berechne $\mathrm{P}(X = k)$ für $k \in \mathbb{N}$.
(ii) Wie lautet μ_X?
(iii) Im Fall $n = 2$ berechne F_X und zeichne F_X.
Hinweis: Die Definitionen sind in Notizen 4 (Seite 10) und Notizen 4 (Seite 11).

(b) Wir definieren eine weitere Zufallsvariable

$$Y := \prod_{i=1}^{n} Z_i.$$

(i) Berechne $\mathrm{P}(Y = k)$ für $k \in \{0, 1\}$.
(ii) Wie lautet μ_Y?
(iii) Berechne F_Y und zeichne F_Y.

Aufgabe 4.2 Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6\}^n$ mit $\mathrm{P}(\cdot) = \frac{|\cdot|}{6^n}$. Wir definieren n Zufallsvariablen $X_i(\omega) := \omega_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. (Das wäre zum Beispiel ein sinnvolles Modell für n unabhängige Würfelwürfe.) Wir definieren

$$Z = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} X_i$$

als die höchste gewürfelte Augenzahl unter den n geworfenen Würfeln.[2]
Berechne die Verteilungsfunktion F_Z von Z.

Aufgabe 4.3 [Verteilungsfuntion: (Un-)Stetigkeitsstellen]
Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Gemäss Theorem aus Notizen 4 (Seite 13) (Theorem 2.4 im Skript) ist die Verteilungsfunktion von X an jeder Stelle rechtsseitig stetig. In dieser Aufgabe beantworten wir die Frage, an welchen Stellen F_X auch linksseitig stetig (und somit stetig) ist. Zur Erinnerung: F_X ist *linksseitig stetig* an der Stelle $a \in \mathbb{R}$, falls

$$F_X(a-) := \lim_{h \downarrow 0} F_X(a - h) = F_X(a).$$

[1] Bemerke, dass Aufgabe 4.1 vollständig gelöst werden könnte ohne jemals einen konkreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ zu definieren. Die einzige Information die wir über die Zufallsvariablen $(Z_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ für diese Aufgabe benötigen, ist dass sie u.i.v. sind und $\mathrm{P}(Z_i = 1) = \mathrm{P}(Z_i = 0) = \frac{1}{2}$ erfüllen. Mit diesen Zufallsvariablen Z_i könnte man beispielsweise n unabhängige Münzwürfe modellieren.

[2] Wenn wir Operationen die auf $\mathbb{R}$ definiert sind auf reellwertige Funktionen anwenden, ist das punktweise zu verstehen, also $\forall \omega \in \Omega : Z(\omega) = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} X_i(\omega)$.

(a) Zeige, dass
$$\mathrm{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a-) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$
Hinweis: Nutze die Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses aus Proposition 1.11. im Skript.

(b) Schlussfolgere, dass F_X an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig ist genau dann, wenn $\mathrm{P}(X = a) = 0$ gilt.

Aufgabe 4.4 Let (X_n) be a sequence of independent random variables that are all uniformly distributed on $[0, 1]$. Show that

$$\text{almost surely,} \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \ln\left(\frac{1}{X_n}\right) = 1$$

Hint: Use the Borel-Cantelli lemmas.

Die folgenden beiden Aufgaben verwenden Inhalte von der Vorlesung vom Dienstag, 26. März. Darum empfehlen wir diese erst nach Dienstag zu lösen:

Aufgabe 4.5 [Konstruktion von Zufallsvariablen]

Definition 4.1 (Bernoulli-Zufallsvariable)**.** Wenn wir schreiben, dass eine Zufallvariable X Ber(p)-verteilt ist, dann bedeutet das, dass $\mathrm{P}(X = 1) = p$ und $\mathrm{P}(X = 0) = 1 - p$. Eine Kurzschreibweise ist $X \sim \mathrm{Ber}(p)$.

Ziel dieser Aufgabe ist es, Zufallsvariablen aus einer Folge unabhängiger Münzwürfe zu konstruieren. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\geq 1}$ eine unendliche Folge von unabhängigen, Ber$(1/2)$-verteilten Zufallsvariablen. Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

$i = 1$
While $\quad X_i = X_{i+1} = 1 \quad$ **do**
$\qquad i = i + 2$
endwhile
$Z = X_i + 2 \cdot X_{i+1}$
Return $\quad Z$

(a) Zeige, dass der Algorithmus immer (mit Wahrscheinlichkeit 1) nach endlich vielen Schritten terminiert.

(b) Zeige, dass Z eine gleichverteilte Zufallsvariable in $\{0, 1, 2\}$ ist.

(c) Gebe einen Algorithmus an, der eine Ber$(1/5)$-verteilte Zufallsvariable ausgibt.

(d) *[Bonus]* Gebe einen Algorithmus an, der eine Ber$(1/\pi)$-verteilte Zufallsvariable Z ausgibt.

Aufgabe 4.6 [Transformation von Zufallsvariablen]
Ziel dieser Aufgabe ist es, Zufallsvariablen durch Transformation einer gleichverteilten Zufallsvariable zu konstruieren. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und U eine gleichverteilte Zufallsvariable in $[0, 1]$, d.h. $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

(a) Konstruiere aus U eine Ber$(1/3)$-verteilte Zufallsvariable Z.

(b) Konstruiere aus U eine gleichverteilte Zufallsvariable U' in $[-1, 2]$. Was ist die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $(U')^2$?

(c) Konstruiere aus U eine Exp(λ)-verteilte Zufallsvariable Y.
Hinweis: Eine Zufallsvariable heisst exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ (kurz Exp(λ)-verteilt), falls folgende die Verteilungsfunktion hat:
$$F(a) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda a}, & \text{für } a \geq 0, \\ 0, & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).