Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 5

Version 2 (4. April 2024: In Aufgabe 5.3 gilt natürlich “$T_2 \sim \text{Geo}(q)$” und nicht “$T_2 \sim \text{Geo}(g)$”. In Aufgabe 5.3(a) muss natürlich “$\forall a \in \mathbb{N} : \mathrm{P}(T > a) = (1-p)^a$” anstatt “$\forall a \in T \in \mathbb{N} : \mathrm{P}(T > a) = (1-p)^a$” stehen.), Version 1 (4. April 2024)
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **09. April** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **11. April 8:00**. Nachher kann selbstständig mit der Lösung verglichen werden.

Aufgabe 5.1 [Gemeinsame Verteilung diskreter Zufallsvariablen I]
Wir definieren die Menge $W = \mathbb{N}^2$ Wir definieren die Funktion $p : W \to [0,1]$,

$$p(j,k) = \begin{cases} C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{für } k = 2,3,\ldots \text{ und } j = 1,2,\ldots,k-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit folgenden Eigenschaften

- $\mathrm{P}((X,Y) \in W) = 1$ und
- $\forall (j,k) \in W : \mathrm{P}(X = j, Y = k) = p(j,k)$.[1]

(a) Bestimme die Konstante C.

(b) Berechne die Gewichtsfunktionen p_X und p_Y der Zufallsvariablen X und Y. Gib auch μ_X und μ_Y an.

(c) Sind X und Y unabhängig?

Bemerkung: Diese Bemerkung ist irrelevant für die Lösung der Aufgabe, aber sie gibt vielleicht eine Motivation und einen Ausblick warum Aufgabe 5.1 später interessant sein könnte. Später wird die Notation der gemeinsamen Gewichtsfunktion eingeführt werden. Dann kann man einfach sagen: “Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamer Gewichtsfunktion:

$$p(j,k) = \mathrm{P}(X = j, Y = k) = \begin{cases} C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{für } k = 2,3,\ldots \text{ und } j = 1,2,\ldots,k-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

” und meint damit genau, dass X und Y die beiden oben beschriebenen Eigenschaften erfüllt. Aus masstheoretischer Sicht, ist $\tilde{p} : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty), (x,y) \mapsto \tilde{p}(x,y) = \begin{cases} p(x,y) & \text{wenn } (x,y) \in W \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Radon-Nikodým-Dichte von $\mu_{(X,Y)}$ bezüglich dem Zählmass, wobei $\mu_{(X,Y)}(E) = \mathrm{P}((X,Y) \in E)$. Bewyiehungsweise ist p die Radon-Nikodým-Dichte von $\mu_{(X,Y)}|_W$ bezüglich dem Zählmass auf W. Die Verteilungen der Zufallsvariablen X und Y werden spẗer als Randverteilungen bezeichnet werden.

Aufgabe 5.2 [Gemeinsame Verteilung diskreter Zufallsvariablen II: Konstruktion]
Seien W_1 und W_2 endlich oder abzählbar und sei $p : W_1 \times W_2 \to [0,1]$ eine Funktion mit

$$\sum_{x_1 \in W_1, x_2 \in W_2} p(x_1, x_2) = 1.$$

Seien weiterhin U_1 und U_2 zwei unabhängige $\mathcal{U}([0,1])$-verteilter Zufallsvariablen. Ziel dieser Aufgabe ist es, mithilfe von U_1 und U_2 zwei diskrete Zufallsvariablen X_1 und X_2 zu konstruieren, sodass (X_1, X_2) die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $\mathrm{P}((X_1,X_2) \in W) = 1$, wobei $W := W_1 \times W_2$, und

[1] Die erste Eigenschaft kann auch äquivalent als $\mathrm{P}(\{\, \omega \in \Omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in W \,\}) = 1$ gelesen werden oder äquivalent kann man auch sagen $(X,Y) \in W$ P-f.s.. Die zweite Eigenschaft kann auch äquivalent als $\forall (j,k) \in W :$ $\mathrm{P}(\{\, \omega \in \Omega : X(\omega) = j \text{ und } Y(\omega) = k \,\}) = p(j,k)$ gelesen werden.

- $\forall (x_1, x_2) \in W : \mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = p(x_1, x_2)$.

(a) Was ist die Gewichtsfunktion p_{X_1} der Zufallsvaraible X_1? Nutze U_1, um die Zufallsvariable X_1 zu konstruieren.
Erinnerung: In Aufgabe 4.6 haben wir bereits einige Zufallsvariablen aus einer $\mathcal{U}([0,1])$-verteilter Zufallsvariable konstruiert.

(b) Analog zu Aufgabenteil (a) könnte man nun auch U_2 nutzen, um die Zufallsvariable X_2 mit Gewichtsfunktion p_{X_2} zu konstruieren. Zeige, dass (X_1, X_2) in diesem Fall

$$\forall (x_1, x_2) \in W : \mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = q(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$$

erfüllen würde.

Die Konstruktion aus Aufgabenteil (b) funktioniert also nur, falls $p(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ für alle $x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$ gilt, also wenn die Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig sind. Aber nicht jede Funktion p kann so dargestellt werden. Im Fall von abhängigen Zufallsvaraiblen X_1 und X_2 gilt $p \neq q$.

(c) *[schwer]* Nutze U_2, um die Zufallsvariable X_2 so zu konstruieren, dass (X_1, X_2) beide oben genannten Eigenschaften erfüllt (insbesondere in Fällen wo $p \neq q$, soll $\forall (x_1, x_2) \in W : \mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = p(x_1, x_2)$ gelten).

Aufgabe 5.3 Seien $T_1 \sim \mathrm{Geo}(p)$ und $T_2 \sim \mathrm{Geo}(q)$ zwei unabhängige geometrisch verteilte Zufallsvaraiblen mit $p, q \in (0, 1]$ (siehe Def. in Notizen 6 (Seite 8)).

(a) Zeige, dass

$$T \sim \mathrm{Geo}(p) \iff \Big(\mathrm{P}(T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}) = 1 \text{ und } \forall a \in \mathbb{N} : \mathrm{P}(T > a) = (1-p)^a\Big)$$

gilt.

(b) Zeige, dass

$$\min(T_1, T_2) \sim \mathrm{Geo}(r)$$

gilt und gebe eine Formel für r an.

(c) Zeige (im Fall $p = q$)[2], dass das Maximum zweiter unabhängiger geometrisch verteilter Zufallsvariablen nicht geometrisch verteilt ist, i.e.,

$$\nexists r \in (0, 1] : \max(T_1, T_2) \sim \mathrm{Geo}(r).$$

(i) Zeige hierfür zuerst, dass $\mathrm{P}(\max(T_1, T_2) > a) = (1-p)^a + (1-q)^a - (1-p)^a(1-q)^a$

(ii) Betrachte $\lim_{a \to \infty} \frac{\mathrm{P}(\max(T_1,T_2)>a)}{\mathrm{P}(\max(T_1,T_2)>a)} = 1$ um zu zeigen, dass kein r diese Gleichung erfüllen kann.

If you have feedback regarding the exercise sheets, please write into the forum (or send a mail to Jakob Heiss).

[2] Die Aussage gilt auch für $p \neq q$, aber dann wird der Beweis ein wenig länger.