Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 6

Version 1 (11. April 2024)
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **16. April** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **18. April 8:00**. Nachher kann selbstständig mit der Lösung verglichen werden.

Aufgabe 6.1 [Diskrete Zufallsvariable: Verteilungsfuntion und Gewichtsfunktion]
Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 1, \\ 1/5, & \text{falls } 1 \leq a < 4, \\ 3/4, & \text{falls } 4 \leq a < 6, \\ 1, & \text{falls } 6 \leq a. \end{cases}$$

(a) Skizziere die Verteilungsfunktion von X.

(b) Zeige, dass X eine diskrete Zufallsvariable ist.

(c) Berechne die Gewichtsfunktion von X und skizziere diese.

(d) Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathrm{P}(X = 6), \ \mathrm{P}(X = 5), \ \mathrm{P}(2 < X < 5.5), \ \mathrm{P}(0 \leq X < 4).$$

Aufgabe 6.2 [Stetige Zufallsvariablen: Verteilungsfunktion und Dichte]
Sei T eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_T(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0, \\ 1 - e^{-2a}, & \text{falls } a \geq 0. \end{cases}$$

(a) Skizziere die Verteilungsfunktion von T.

(b) Zeige, dass T eine stetige Zufallsvariable ist.

(c) Berechne die Dichte von T.

(d) Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathrm{P}(T = 2), \ \mathrm{P}(T \leq 1), \ \mathrm{P}(T \geq 2), \ \mathrm{P}(1 < T < 4).$$

Aufgabe 6.3 [Anwendung der Exponentialverteilung]
Wir betrachten eine Messsonde an einem Vulkankrater, welche den bevorstehenden Ausbruch beobachten soll. Ab Beginn der Messungen gehen wir davon aus, dass die Sonde innerhalb von einer Minute mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{20}$ wegen zu grosser Beschädigung ausfällt. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Lebensdauer der Sonde in Minuten. Es gilt $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, d.h. Y ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Bestimme λ.
Hinweis: Falls Du a) nicht gelöst hast, so rechne für die weiteren Teilaufgaben mit $\lambda = -\ln(0.95)$.

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde mehr als 10 Minuten überlebt?

(c) Wir wissen, dass die Sonde schon mehr als 20 Minuten überlebt hat. Wie gross ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde nochmals 10 Minuten überlebt?

If you have paid full attention to the end of the lecture from April 11$^{\text{th}}$ you can solve Aufgaben 6.4 and 6.5 already today. Otherwise, solve Aufgaben 6.4 and 6.5 after Tuesday, April 16$^{\text{th}}$, when Notes 8 will be online.

Aufgabe 6.4 Alice rolls a die (Würfel) and pays the square of the resulting number (quadrierte Augenzahl) to Bob in CHF.

i) Define a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ that describes rolling the die.

ii) Define a random variable X that describes how many CHF Bob receives, and write down its probability mass function (Gewichtsfunktion)[1] p_X.

iii) Calculate the expected value $\mathbb{E}[X]$.

Aufgabe 6.5

(a) Construct a discrete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ with $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ and discrete random variables $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ on it, such that

   i) $\mathrm{P}(X < \infty) = 1$ and $\mathbb{E}[X] = \infty$.

   ii) $\mathbb{E}[Y] < \infty$ and $\mathbb{E}\left[Y^2\right] = \infty$.

(b) Is it possible to construct on a discrete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ a discrete random variable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ such that $\mathbb{E}[Z] = \infty$ and $\mathbb{E}\left[Z^2\right] < \infty$?

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).

[1] Die Gewichtsfunktion $(p_X(x))_{x \in W}$ wird in der Literatur häufig auch als "(Wahrscheinlichkeits)verteilung", "(Wahrscheinlichkeits-)Gewichtsfunktion", "(Wahrscheinlichkeits-)Gewicht(ung)" oder als "diskrete (Wahrscheinlichkeits-)Dichte" (oder als "Radon-Nikodým-Dichte bezüglich des Zählmasses") bezeichnet. In English, the probability mass function is often simply denoted as "(probability) distribution" (or as "Radon–Nikodym derivative with respect to the counting measure").