Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 7

Version 1 (18. April)
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **23. April** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **25. April 8:00**. Nachher kann selbstständig mit der Lösung verglichen werden.

Aufgabe 7.1 [Erwartungswert stetiger Zufallsvariablen I]
Nehmen wir an, dass $-\infty < a < b < \infty$ und $c > 0$.

(a) Sei $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ und $U' := a + (b-a)U$. Was ist der Erwartungswert von U'?

(b) Sei $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$ und $T' := c \cdot T^2$. Was ist der Erwartungswert von T'?
Hinweis: Nutze den Satz in Notizen 8 (Seite 22).

Aufgabe 7.2 [Erwartungswert stetiger Zufallsvaraiblen II]
Sei $r > 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1, \\ cx^{-r} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

für ein $c > 0$.

(a) Bestimme die Konstante c, sodass f zu einer Dichtefunktion wird.

(b) Wir nehmen ab jetzt an, dass die Konstante so bestimmt ist, dass f zu einer Dichtefunktion wird. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X = f$. Berechne die Verteilungsfunktion von X.

(c) Berechne den Erwartungswert von X. Für welche Werte von r ist der Erwartungswert endlich?

Aufgabe 7.3 [Erwartungswert unabhängigiger von Zufallsvarablen]
Seien T_1, T_2, T_3 drei unabhängige Zufallsvariablen mit

$$T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i), \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Definiere die Zufallsvariable $S := T_1 \cdot T_2$.

(a) Berechne den Erwartungswert von S.
Hinweis: Nutze den Satz in Notizen 8 (Seite 20).

(b) Zeige, dass die Zufallsvariablen S und T_3 unabhängig sind.
Hinweis: Nutze das Resultat aus Satz 2.7 aus dem Skript zur Gruppierung von unabhängigen Zufallsvariablen.

Aufgabe 7.4 [Verteilung stetiger Zufallsvektoren: Extrema gleichverteilter Zufalsvariablen]
Seien U_1, U_2, U_3 unabhängige, $\mathcal{U}([0,1])$-verteilte Zufallsvariablen. Wir betrachten die stetigen Zufallsvariablen

$$L := \min(U_1, U_2, U_3) \quad \text{und} \quad M := \max(U_1, U_2, U_3).$$

(a) Berechne den Erwartungswert von M und L.

(b) Zeige, dass für $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt

$$\mathbb{E}\left[\phi(M) \cdot \psi(L)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(m) \cdot \psi(\ell) \cdot 6(m-\ell) \mathbb{1}_{0 \leq \ell \leq m \leq 1} \, d\ell dm.$$

(c) Nutze (b), um die Verteilungsfunktion und die Dichte des Zufallsvektors (M, L) zu bestimmen.[1]

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).

[1] Die Verteilungsfunktion beziehungsweise die Dichte des Zufallsvektors (M, L) werden auch als "gemeinsame Verteilungsfunktion" beziehungsweise "gemeinsame Dichte von (M, L)" bezeichnet.