Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 9

Version 1 (2. Mai)
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **07. Mai** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **09. Mai 8:00**. Nachher kann selbstständig mit der Lösung verglichen werden.

Aufgabe 9.1 [Zentraler Grenzwertsatz I: Zufällige Irrfahrt]
Seien $(X_i)_{i\geq 1}$, $(Y_i)_{i\geq 1}$ und $(Z_i)_{i\geq 1}$ Folgen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$\mathrm{P}\left(X_1 = 1\right) = \mathrm{P}\left(X_1 = -1\right) = 1/2$$

und analog $\mathrm{P}\left(Y_1 = 1\right) = \mathrm{P}\left(Y_1 = -1\right) = 1/2$ sowie $\mathrm{P}\left(Z_1 = 1\right) = \mathrm{P}\left(Z_1 = -1\right) = 1/2$. Wir definieren

$$S_n^{(x)} := \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n^{(y)} := \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \text{and} \quad S_n^{(z)} := \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Die Folge $\left((S_n^{(x)}, S_n^{(y)}, S_n^{(z)})\right)_{n\geq 1}$ wird zufällige Irrfahrt in $\mathbb{Z}^3$ genannt. Sei $\alpha > 1/2$. Zeige, dass

$$\mathrm{P}\left(\left\|(S_n^{(x)}, S_n^{(y)}, S_n^{(z)})\right\|_2 \leq n^\alpha\right) \to 1 \text{ as } n \to \infty,$$

wobei $\|(x,y,z)\|_2 := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ die euklidische Norm ist.
Hinweis: Betrachte zuerst die Folge $(S_n^{(x)})_{n\geq 1}$ und wende den zentralen Grenzwertsatz an.

Aufgabe 9.2 [Zentraler Grenzwertsatz II]
In dieser Aufgabe berechnen wir den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

(a) Sei $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$. Berechne $\mathbb{E}\left[X\right]$ und σ_X^2.

(b) Zeige mit dem zentralen Grenzwertsatz, dass der obige Grenzwert $1/2$ ist.
Hinweis: Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y mit $X \sim Poisson(\lambda)$, $\lambda > 0$, und $Y \sim Poisson(\mu)$, $\mu > 0$, ist $X + Y \sim Poisson(\lambda + \mu)$.

Aufgabe 9.3 [Schätzer I: gleichverteilte Zufallsvariablen]
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{U}([\theta - 1, \theta])$ unter P_θ, wobei $\theta \in \mathbb{R}$ ein unbekannter Parameter ist. Für θ bieten sich

$$T_1^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i + 1/2) \quad \text{und} \quad T_2^{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$$

als Schätzer an. Wir untersuchen in dieser Aufgabe, welche Eigenschaften diese beiden Schätzer besitzen.

(a) Untersuche, ob die Schätzer erwartungstreu sind.

(b) Berechne die Varianzen der Schätzer $\mathrm{Var}_\theta[T_1^{(n)}]$ und $\mathrm{Var}_\theta[T_2^{(n)}]$.

(c) Berechne die mittleren quadratischen Schätzfehler $\mathrm{MSE}_\theta[T_1^{(n)}]$ und $\mathrm{MSE}_\theta[T_2^{(n)}]$.

Aufgabe 9.4 [Schätzer II: Hochwasser im Zürichsee]
Wir betrachten Pegelstände bei Hochwasser im Zürichsee. Hochwasser bedeute dabei, dass der Pegelstand die kritische Marke von 140 cm über Normalniveau überschreitet. Die Zufallsvariable X messe die Wasserhöhe in cm über der kritischen Marke. Zur Modellierung von X können wir eine sogenannte verallgemeinerte Pareto-Verteilung mit Dichte

$$f_X(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}(1+x)^{-(1+\frac{1}{\theta})} & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

verwenden. Dabei ist $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter, der auf Basis von Daten $x_1, \dots, x_n$ geschätzt werden soll; diese Daten werden wie üblich als Realisierungen von Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ aufgefasst, die für jede Wahl des Parameters θ unter P_θ u.i.v. sind mit Dichte $f_X(x;\theta)$. Als Schätzer für θ verwenden wir

$$T^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\log(1+X_i)}{n}.$$

(a) Berechne den Erwartungswert und die Varianz von $T^{(n)}$ im Modell P_θ für jedes $\theta > 0$.
Hinweis: Benutze, dass $Y_i := \log(1+X_i) \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\theta})$ ist, d.h. Y_i hat unter P_θ die Dichte $f_Y(y) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}y}\mathbb{1}_{\{y\geq 0\}}$.

(b) Ist $T^{(n)}$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ?

(c) Berechne den mittleren quadratischen Schätzfehler $\mathrm{MSE}_\theta[T^{(n)}]$ im Modell P_θ für jedes $\theta > 0$.

Aufgabe 9.5 [χ^2-Verteilung]
Sei Y eine χ_n^2-verteilte Zufallsvariable mit $n \in \mathbb{N}$, das heisst

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

wobei $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt sind.

(a) Zeige, dass

$$\mathbb{E}[Y] = n \quad \text{und} \quad \sigma_Y^2 = 2n$$

gilt.

(b) Gebe mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{Y}{n} - 1\right| \leq 0.75\right].$$

Berechne die Schranke für $n = 12$.

(c) Berechne für $n = 12$ eine Annäherung für die obige Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).