Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 10

Version 2 (23. Mai 2024: Änderungen an Aufgabe 10.1 inkl. Lösung), Lösung Version 1 (16. Mai: basierend auf Serie Version 1 (9. Mai))
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **14. Mai** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **16. Mai 8:00**. Nachher kann selbstständig mit dieser Lösung verglichen werden.

Diese Woche ist die Serie kürzer, weil 9. Mai ein Feiertag ist :)

Aufgabe 10.1 [MLE I: Uniform verteilt]
Wir betrachten u.i.v. Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$, wobei alle X_i die uniforme Verteilung auf $[0, \theta]$ mit $0 < \theta$ besitzen. Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Realisierung von $(X_1, \ldots, X_n)$. Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer (engl. „maximum likelihood estimator (MLE)“) für θ für diese Realisierung $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$.

Hinweis: Die Likelihood-Funktion ist nicht differenzierbar. Es kann probiert werden erst die intuitiv richtige Lösung hinzuschreiben und anschliessend zu beweisen, dass diese korrekt ist.

Lösung 10.1 Die Likelihood-funktion ist gegeben als

$$L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} 1_{[0,\theta]}(x_i). \tag{1}$$

Jetzt müssen wir $\hat{\theta}$ finden sodass

$$L_x(\hat{\theta}) = \max_\theta L_x(\theta)$$

gilt. Es muss somit $L_x(\theta)$ für feste $(x_1, \ldots, x_n)$ bezüglich θ maximiert werden. Seie $x^* := \max_{1\le i\le n} x_i$. Falls x^* ausserhalb $[0, \theta]$ liegt, dann verschwindet die rechte Seite von (1). Also muss die Maximumstelle $\hat{\theta}$ die Bedingungen $\hat{\theta} \geq x^*$ erfüllen. Für $\boxed{\hat{\theta} := x^* = \max_{1\le i\le n} x_i}$ ist $L_x(\theta) \leq L_x(\hat{\theta})$ für alle $\theta > 0$. Somit ist $T = \max_{1\le i\le n} X_i$ der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ. (Das Maximum wird natürlich punktweise verstanden, also $T(\omega) = \max_{1\le i\le n}(X_i(\omega))$.)

Analoge Lösung für $X_i \sim \mathcal{U}(a, b)$: Wir behandeln den allgemeinen Fall der uniformen Verteilung auf $[a, b]$ und bestimmen den Maximum-Likelihood-Schätzer für die Parameter a und b. Die Likelihood-funktion ist gegeben als

$$L_x(a, b) = \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i) = \frac{1}{(b-a)^n} \prod_{i=1}^{n} 1_{[a,b]}(x_i). \tag{2}$$

Jetzt müssen wir $\hat{a}$ und $\hat{b}$ finden sodass

$$L_x(\hat{a}, \hat{b}) = \max_{a,b} L_x(a, b)$$

gilt. Es muss somit $L_x(a, b)$ für feste $(x_1, \ldots, x_n)$ bezüglich a und b maximiert werden. Seien $x_* := \min_{1\le i\le n} x_i$ und $x^* := \max_{1\le i\le n} x_i$. Falls x_* oder x^* ausserhalb $[a, b]$ liegen, dann verschwindet die rechte Seite von (2). Also muss die Maximumstelle $(\hat{a}, \hat{b})$ die Bedingungen $\hat{b} \geq x^* \geq x_* \geq \hat{a}$ erfüllen. Für $\boxed{\hat{a} := x_* = \min_{1\le i\le n} x_i}$ und $\boxed{\hat{b} := x^* = \max_{1\le i\le n} x_i}$ ist $L_x(a, b) \leq L_x(\hat{a}, \hat{b})$ für alle a, b. Somit liefert das die Maximum-Likelihood-Schätzungen für a und b.

Aufgabe 10.2 [MLE II: Stetige Verteilung]
Wir betrachten eine stetige Verteilung mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^{\theta+1}} & x \geq 1\,, \\ 0 & x < 1\,, \end{cases}$$

wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter ist. Wir wollen den Parameter θ mit Hilfe eines Datensatzes schätzen.

(a) Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe von unabhängigen Zufallsvariablen, welche alle die Dichte f besitzen. Bestimme die Likelihood- und log-Likelihood-Funktion.

(b) Bestimme den zugehörigen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ. Schreibe zuerst die allgemeine Formel für n Beobachtungen hin und berechne dann den Schätzwert für die folgende konkrete Stichprobe:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
12.0	4.0	6.9	27.9	15.4

Lösung 10.2

(a) Die Likelihood-Funktion ergibt sich aus dem Produkt der Dichten. Für $x_1, \ldots, x_n \geq 1$ erhalten wir

$$L(x_1, \ldots x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{x_i^{\theta+1}} = \theta^n \frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\theta+1}}\,.$$ [1]

Falls $x_i < 1$ für ein $1 \leq i \leq n$, ist die Likelihood-Funktion gleich 0, wir können uns also auf den Fall $x_1, \ldots, x_n \geq 1$ beschränken.
Die log-Likelihood-Funktion erhalten wir durch Logarithmieren obiger Formel als

$$\ell(x_1, \ldots x_n; \theta) = \log L(x_1, \ldots x_n; \theta) = n \log \theta - (\theta + 1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i.$$

(b) Ableiten und Nullsetzen der log-Likelihood-Funktion ergibt

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ell(x_1, \ldots x_n; \theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0$$

für $\theta^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}$. Für $\theta < \theta^*$ ist die Ableitug strikt positiv, für $\theta > \theta^*$ strikt negativ, es handelt sich also um das Maximum. Also ist der Maximum-Likelihood-Schätzer

$$T_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log X_i} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log X_i}.$$

Der realisierte Schätzwert für die gegebenen Daten ist dann

$$t_{ML} = \frac{5}{\sum_{i=1}^{5} \log x_i} = 0.4214.$$

Hinweis: Wir verwenden den natürlichen Logarithmus.[2]

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).

[1] Teilweise wird in der Literatur die Notation $L(x_1, \ldots x_n; \theta)$ für die Likelihood-Funktion $L_x(\theta) = L_{x_1,\ldots x_n}(\theta)$ verwendet (und analog $l(x_1, \ldots x_n; \theta)$ für die log-Likelihood-Funktion $l_x(\theta) = l_{x_1,\ldots x_n}(\theta) = \log(L_{x_1,\ldots x_n}(\theta))$).

[2] Für den natürlichen Logarithmus erhalten wir $\frac{\partial}{\partial \theta} \log(\theta) = \frac{1}{\theta}$. Hätten wir einen anderen Logarithmus gewählt, hätten wir eine andere Ableitung erhalten.