Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 11

Version 2 (28. Mai 2024: kleine Änderungen), Lösung Version 1 (23. Mai: basierend auf Serie Version 1 (16. Mai))
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **21. Mai** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **23. Mai 8:00**. Nachher kann selbstständig mit dieser Lösung verglichen werden.

Aufgabe 11.1 [**MLE III: Hochwasser im Zürichsee**]
In Aufgabe 9.4 haben wir folgendes Modell betrachtet: Die Zufallsvariable X messe die Wasserhöhe in cm über der kritischen Marke von 140 cm über Normalniveau im Zürichsee. Zur Modellierung von X können wir eine sogenannte verallgemeinerte Pareto-Verteilung mit Dichte

$$f_X(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}(1+x)^{-(1+\frac{1}{\theta})} & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

verwenden. Dabei ist $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter, der auf Basis von Daten $x_1, \dots, x_n > 0$ geschätzt werden soll; diese Daten werden wie üblich als Realisierungen von Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ aufgefasst, die für jede Wahl des Parameters θ unter P_θ i.i.d. sind mit Dichte $f_X(x;\theta)$. Zeige, dass der Schätzer

$$T^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\log(1+X_i)}{n}$$

der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ ist.

Lösung 11.1 Die log-Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \log L(x_1, \dots, x_n; \theta) &= \log\left(\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-(1+\frac{1}{\theta})}\right) \\ &= -n\log\theta - (1+\frac{1}{\theta})\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i). \end{aligned}$$

Ableiten nach θ und Nullsetzen ergibt

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(x_1, \dots, x_n; \theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i) = 0$$

für

$$\theta^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i).$$

Die zweite Ableitung ist

$$\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i),$$

also strikt kleiner als 0 an der Stelle θ^* und somit handelt es sich also um das Maximum. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ ist also

$$T_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i) = T^{(n)}.$$

Aufgabe 11.2 [Mittlerer quadratischer Schätzfehler (MSE): Normalverteilung]
Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und je $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt unter P_θ, wobei $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ ein 2-dimensionaler unbekannter Parameter ist. Als Schätzer für σ^2 betrachte man

$$T^{(n)}(c) := c \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2,$$

wobei $\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ und $c > 0$ ist.

(a) Für welches $c^* > 0$ wird der mittlere quadratische Schätzfehler $\mathbb{E}_\theta\left[\left(T^{(n)}(c^*) - \sigma^2\right)^2\right]$ minimiert?
Hinweis: Verwende, dass $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 \sim \chi^2_{n-1}$-verteilt ist unter P_θ.

(b) Entspricht der in (a) gefundene Schätzer $T^{(n)}(c^*)$ dem Maximum-Likelihood-Schätzer?

Lösung 11.2

(a) Wir fixieren zuerst ein $c > 0$ und setzen

$$T^* := \frac{1}{\sigma^2 c} T^{(n)}(c) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Mit dem Hinweis folgt, dass

$$E_\theta[T^*] = n - 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}_\theta[T^*] = 2(n-1).$$

Also ist

$$\begin{aligned} f(c) := \mathrm{MSE}_\theta[T^{(n)}(c)] &= \mathrm{Var}_\theta[T^{(n)}(c) - \sigma^2] + \left(E_\theta\left[T^{(n)}(c) - \sigma^2\right]\right)^2 \\ &= \mathrm{Var}_\theta[\sigma^2 c T^*] + \left(E_\theta[\sigma^2 c T^* - \sigma^2]\right)^2 \\ &= \sigma^4 c^2 2(n-1) + \sigma^4 \left(c(n-1) - 1\right)^2 \\ &= \sigma^4 c^2 \left((n-1)^2 + 2(n-1)\right) - \sigma^4 c 2(n-1) + \sigma^4. \end{aligned}$$

Für beliebiges $c > 0$ ist also

$$f'(c) = 2c\left(2(n-1) + (n-1)^2\right)\sigma^4 - 2(n-1)\sigma^4$$

und

$$f''(c) = \left(4(n-1) + 2(n-1)^2\right)\sigma^4 > 0.$$

Insbesondere ist f strikt konvex und nimmt das globale Minimum bei $c^* = \frac{1}{n+1}$ an. Der gesuchte Schätzer ist also

$$T^{(n)}(c^*) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2,$$

was genau der empirischen Varianz aus Notizen 13 (Seite 7) entspricht.

(b) Nein, der Maximum-Likelihood-Schätzer für σ^2 ist

$$T_{ML}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2,$$

wie in Beispiel 2 von Abschnitt 1.4 von `https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/sc/skript-2-de.pdf#page=11` auf deutsch hergeleitet wird.
Wir wiederholen die Rechnung hier auf englisch:
We look for μ and σ^2 which maximize L, which is equivalent to maximizing $\log L$. We compute the partial derivatives and set them to 0; this gives

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{2}\right)\frac{1}{(\sigma^2)^2} = 0.$$

So for any σ^2, $\mu \mapsto \log L(\mu,\sigma^2)$ is maximized for the sample $X_1,\dots,X_n$ when

$$\hat{\mu} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

which is the sample average of the X_i. For $\mu = \overline{X}_n$, $\sigma^2 \mapsto \log L(\mu,\sigma^2)$ is maximized for the sample $X_1,\dots,X_n$ when

$$\widehat{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\overline{X}_n)^2}{n} = \left(\overline{(X_i-\overline{X}_n)^2}\right)_n,$$

which is $\frac{n-1}{n}$ times the sample variance.

Aufgabe 11.3 [Konfidenzintervall für $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ mit bekannter Standardabweichung]
In einem Sägewerk wird das Schnittholz einer bestimmten Sortierklasse einer Qualitätskontrolle unterzogen. An jedem Produktionstag wird ein Brett auf seine Steifigkeit getestet. $X_n, n \geq 1$, bezeichne das Ergebnis am n-ten Tag. Basierend auf Erfahrung kann angenommen werden, dass die Steifigkeit eines Brettes normalverteilt ist mit bekannter Standardabweichung $\sigma = 1430$ MPa[1]. Wir wählen also den Parameterraum $\Theta = \mathbb{R}$ und die Modellfamilie $(\mathrm{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, wobei die $(X_n)_{n\geq 1}$ unter P_θ unabhängig und $\mathcal{N}(\theta,\sigma^2)$-verteilt sind.

(a) Leite die Formel eines Konfidenzintervalls für θ mit Niveau 95% nach 150 Produktionstagen her.

(b) Berechne aus (a) das realisierte Konfidenzintervall für einen beobachteten Stichprobenmittelwert von $11'000$ MPa (nach 150 Produktionstagen).

(c) Wieviele Stichproben wären nötig, damit die Breite des Konfidenzintervalls kleiner als 200 MPa ist?

Lösung 11.3

(a) In unserem Modell sind $X_1,\dots,X_n$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ unter $\mathbb{P}_\theta$, wobei $\theta = \mu$ der unbekannte Parameter ist und die Varianz σ^2 bekannt ist. Dann ist

$$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2/n) \quad \text{unter } \mathbb{P}_\theta.$$

Also gilt

$$\mathbb{P}_\theta\left[-c_{1-\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq c_{1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha,$$

wobei $c_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$. Durch Umformen erhalten wir

$$\mathbb{P}_\theta\left[\overline{X}_n - c_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + c_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha.$$

Also ist

$$\left[\overline{X}_n - c_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\, \overline{X}_n + c_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

ein Konfidenzintervall für $\theta = \mu$ mit Niveau $1-\alpha$. Für $\alpha = 0.05$ erhält man $c_{1-\alpha/2} = c_{0.975} = 1.96$. Das Vertrauensintervall nach 150 Produktionstagen ist also

$$\left[\overline{X}_n - c_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{150}}, \overline{X}_n + c_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{150}}\right] = \left[\overline{X}_n - 228.8477, \overline{X}_n + 228.8477\right].$$

[1] Das Pascal ist eine abgeleitete SI-Einheit des Drucks sowie der mechanischen Spannung. Sie ist nach Blaise Pascal benannt und folgendermassen definiert: 1 Pa $= 1\text{kg}\times\text{m}^{-1}\times\text{s}^{-2} = 1\text{N}\times\text{m}^{-2}$. Ein Pascal ist also der Druck, den eine Kraft von einem Newton auf eine Fläche von einem Quadratmeter ausübt. 1 MPa $= 10^6$ Pa $= 10$ bar.

(b) Aus a) wissen wir, dass das Vertrauensintervall die Form $\left[\overline{X}_n - c_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + c_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ hat. Durch Einsetzen erhalten wir $[10771.15, 11228.85]$, wobei wir verwendet haben, dass $c_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) = 1.96$ für $\alpha = 0.05$.

(c) Die Breite des Vertrauensintervalls ist gegeben durch $2c_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Also wollen wir

$$\begin{aligned} 2c_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\leq 200\,, \\ \frac{c_{1-\alpha/2}\sigma}{100} &\leq \sqrt{n}\,, \\ 785.57 &\leq n. \end{aligned}$$

Das heisst, es muss $n \geq 786$ gelten.

Aufgabe 11.4 [t-Verteilung mit m Freiheitsgraden]
Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \chi^2_m$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass der Quotient

$$Z := \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{m}Y}}$$

t-verteilt ist mit m Freiheitsgraden.

(a) Bestimme die Dichte von $Y' := \sqrt{\frac{1}{m}Y}$.

(b) Seien $\hat{X}$ und $\hat{Y}$ zwei unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte $f_{\hat{X}}$ resp. $f_{\hat{Y}}$. Definiere $\hat{Z} := \frac{\hat{X}}{\hat{Y}}$ und bestimme die Dichte von $\hat{Z}$ (in Abhängigkeit von $f_{\hat{X}}$ und $f_{\hat{Y}}$).

Hinweis: Benutze in (a) und (b) die Charakterisierung der Dichte aus Satz 4.16 aus dem Skript.

(c) Zeige, dass Z t-verteilt ist mit m Freiheitsgraden.

Lösung 11.4

(a) Wir verwenden die Charakterisierung der Dichte aus Satz 4.16 aus dem Skript. Nach Annahme hat Y die Dichte

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \mathbb{1}_{y\geq 0}.$$

Für $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und beschränkt gilt

$$\mathbb{E}\left[\phi(Y')\right] = \mathbb{E}\left[\phi(\sqrt{Y/m})\right] = \int_0^\infty \phi(\sqrt{y/m}) \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} dy.$$

Mit dem Variablenwechsel $z = \sqrt{y/m}$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\phi(Y')\right] &= \int_0^\infty \phi(z) \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} (z^2 m)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}z^2 m} (2mz) dz \\ &= \int_0^\infty \phi(z) \frac{m^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m}{2}-1}\Gamma(\frac{m}{2})} z^{m-1} e^{-\frac{1}{2}z^2 m} dz. \end{aligned}$$

und somit hat Y' die Dichte $f_{Y'}(z) = \frac{m^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m}{2}-1}\Gamma(\frac{m}{2})} z^{m-1} e^{-\frac{1}{2}z^2 m} \mathbb{1}_{z\geq 0}$.

(b) Wir verwenden die Charakterisierung der Dichte aus Satz 4.16 aus dem Skript. Nach Annahme sind die Zufallsvariablen $\hat{X}$ und $\hat{Y}$ unabhängig und haben somit die gemeinsame Dichte $f(x,y) = f_{\hat{X}}(x) \cdot f_{\hat{Y}}(y)$.

Für $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und beschränkt gilt somit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\phi(\hat{Z})\right] = \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{\hat{X}}{\hat{Y}}\right)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x/y) f_{\hat{X}}(x) f_{\hat{Y}}(y)\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x/y) f_{\hat{X}}(x)\, dx\right) f_{\hat{Y}}(y)\, dy + \int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x/y) f_{\hat{X}}(x)\, dx\right) f_{\hat{Y}}(y)\, dy\end{aligned}$$

Mit dem Variablenwechsel $z = x/y$ (für fixiertes y) erhält man

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\phi(\hat{Z})\right] &= \int_{-\infty}^{0}\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) f_{\hat{X}}(yz) y\, dz\right) f_{\hat{Y}}(y)\, dy + \int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) f_{\hat{X}}(yz) y\, dz\right) f_{\hat{Y}}(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) f_{\hat{X}}(yz)|y|\, dz\right) f_{\hat{Y}}(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\hat{X}}(yz) f_{\hat{Y}}(y)|y|\, dy\right) dz\end{aligned}$$

und somit hat Z' die Dichte $f_{\hat{Z}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\hat{X}}(yz) f_{\hat{Y}}(y)|y|\, dy$.

(c) Wir kombinieren die Teilaufgaben (a) und (b), um die Dichte von

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y/m}} = \frac{X}{Y'}$$

zu bestimmen. Da $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, ist die Dichte $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, und da $Y \sim \chi^2_m$ ist die Dichte von Y' aus (a) bekannt. Durch Einsetzen in die allgemeine Formel aus (b) erhalten wir

$$\begin{aligned}f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(yz) f_{Y'}(y)|y|\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(yz)^2/2} \cdot \frac{m^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m}{2}-1}\Gamma(\frac{m}{2})} y^{m-1} e^{-\frac{1}{2}y^2 m} \mathbb{1}_{y\geq 0} \cdot |y|\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{m\pi}\,\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{\infty} \frac{m^{\frac{m+1}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}}} y^m e^{-\frac{1}{2}y^2(m+z^2)}\, dy\end{aligned}$$

Mit dem Variablenwechsel $t = \frac{1}{2}y^2(m+z^2)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}f_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{m\pi}\,\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{\infty} \frac{m^{\frac{m+1}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}}} \left(\frac{2t}{m+z^2}\right)^{m/2} e^{-t} \frac{1}{\sqrt{2t(m+z^2)}}\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{m\pi}\,\Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{m}{m+z^2}\right)^{\frac{m+1}{2}} \int_0^{\infty} t^{\frac{m-1}{2}} e^{-t}\, dt \\ &= \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\sqrt{m\pi}\,\Gamma(\frac{m}{2})} \left(1 + \frac{z^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}},\end{aligned}$$

also ist die Zufallsvariable Z t-verteilt mit m Freiheitsgraden.

Aufgabe 11.5 [Konfidenzintervall für $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit unbekannter Standardabweichung]
Wir betrachten erneut die Situation aus Aufgabe 11.3 und nehmen weiterhin an, dass die Steifigkeit eines Brettes normalverteilt ist. In diesem Fall gehen wir aber davon aus, dass die Standardabweichung σ unbekannt ist. Der unbekannte Parameter $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ist in diesem Fall also 2-dimensional und wir wählen die Modellfamilie $(\mathrm{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, wobei die $(X_n)_{n\geq 1}$ unter P_θ unabhängig und $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt sind. Zur Erinnerung: Aus der Vorlesung kennen wir bereits zwei Schätzer

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

für μ und σ^2.

(a) Zeige für jedes $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta$, dass die Zufallsvariable

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S^2/n}}$$

t_{n-1}-verteilt ist unter P_θ.
Hinweis: Verwende $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$, $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2_{n-1}$, die Unabhängigkeit von $\bar{X}_n$ und S^2 sowie das Resultat aus der vorherigen Aufgabe.

(b) Leite die Formel eines Konfidenzintervalls für μ mit Niveau 95% nach 10 Produktionstagen her.

Lösung 11.5

(a) Aus dem Hinweis folgt, dass

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

und somit erhalten wir aus den Hinweisen und dem Resultat aus Aufgabe Aufgabe 11.4(c), dass

$$\frac{\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{\frac{n-1}{\sigma^2}S^2}{n-1}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$$

t-verteilt ist mit $n-1$ Freiheitsgraden.

(b) In unserem Modell sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ unter $\mathbb{P}_\theta$, wobei $\theta = (\mu, \sigma^2)$ ein 2-dimensionaler unbekannter Parameter ist. Aus (a) wissen wir, dass

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \quad \text{unter } \mathbb{P}_\theta$$

t-verteilt ist mit $n-1$ Freiheitsgraden.
Also gilt

$$\mathbb{P}_\theta\left[-c_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \leq c_{1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha,$$

wobei $c_{1-\alpha/2} = F^{-1}_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ und F_{n-1} die Verteilungsfunktion der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden ist. Durch Umformen erhalten wir

$$\mathbb{P}_\theta\left[\bar{X}_n - c_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + c_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right] = 1-\alpha.$$

Also ist

$$\left[\overline{X}_n - c_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\,,\, \overline{X}_n + c_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right]$$

ein Konfidenzintervall für μ mit Niveau $1-\alpha$. Für $\alpha = 0.05$ erhält man $c_{1-\alpha/2} = c_{0.975} = 2.262$. Das Vertrauensintervall nach 10 Produktionstagen ist also

$$\left[\overline{X}_n - c_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2}{10}}, \overline{X}_n + c_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2}{10}}\right] = \left[\overline{X}_n - 0.715\sqrt{S^2}, \overline{X}_n + 0.715\sqrt{S^2}\right].$$

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).