

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 13

Lösung Version 1 (6. Juni 2024: basierend auf Serie Version 1 (30. Mai))

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im [Forum](#).

Freiwillige [Abgabe](#) bis **06. Juni 8:00**. Nachher kann selbstständig mit dieser Lösung verglichen werden.

Aufgabe 13.1 [Likelihood-Quotienten-Test]

- (a) Sei $\Theta = [0, \infty)$ und seien X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Exp}(\theta)$ unter P_θ . Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 1$ und die Alternativhypothese $H_1 : \theta = 2$. Konstruiere den (c, q) -Neyman-Pearson-Test mit $c \geq 0$ und $q \in [0, 1]$.
- (b) Sei $\Theta = [0, 1]$ und seien X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Geom}(\theta)$ unter P_θ . Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 1/2$ und die Alternativhypothese $H_1 : \theta = 3/4$. Konstruiere den (c, q) -Neyman-Pearson-Test mit $c \geq 0$ und $q \in [0, 1]$.

Lösung 13.1

- (a) Die Dichte einer $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariable ist gegeben durch $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$. Da X_1, \dots, X_n u.i.v. sind mit $X_1 \sim \text{Exp}(\theta)$ unter P_θ , ergibt sich die gemeinsame Dichte als Produkt der einzelnen Dichten. Somit erhalten wir für $x_1, \dots, x_n \geq 0$ den Likelihood-Quotienten

$$r(x_1, \dots, x_n) = \frac{L(x_1, \dots, x_n; 2)}{L(x_1, \dots, x_n; 1)} = \frac{2^n e^{-2(x_1 + \dots + x_n)}}{e^{-(x_1 + \dots + x_n)}} = 2^n e^{-(x_1 + \dots + x_n)}.$$

Falls $x_i < 0$ für ein $1 \leq i \leq n$, erhält man $r(x_1, \dots, x_n) = +\infty$. Der (c, q) -Neyman-Pearson-Test ist also der randomisierte Test $\varphi(X)$ mit

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } r(X_1, \dots, X_n) > c \\ q & \text{wenn } r(X_1, \dots, X_n) = c \\ 0 & \text{wenn } r(X_1, \dots, X_n) < c \end{cases}$$

Für Realisierungen x_1, \dots, x_n wird die Nullhypothese also verworfen, falls

$$2^n e^{-(x_1 + \dots + x_n)} > c \iff n \cdot \log(2) - \log(c) > x_1 + \dots + x_n.$$

Der Wert von q ist P-f.s. egal, weil $r(X_1, \dots, X_n) \neq c$ P-f.s..

- (b) Für eine $\text{Geom}(p)$ -verteilte Zufallsvariable X gilt $P(X = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Da X_1, \dots, X_n u.i.v. sind mit $X_1 \sim \text{Geom}(\theta)$ unter P_θ , erhalten wir für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ den Likelihood-Quotienten

$$r(x_1, \dots, x_n) = \frac{L(x_1, \dots, x_n; 3/4)}{L(x_1, \dots, x_n; 1/2)} = \frac{(3/4)^n (1/4)^{x_1 + \dots + x_n - n}}{(1/2)^n (1/2)^{x_1 + \dots + x_n - n}} = \frac{3^n}{2^{x_1 + \dots + x_n}}.$$

Falls $x_i \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für ein $1 \leq i \leq n$, erhält man $r(x_1, \dots, x_n) = +\infty$. Der (c, q) -Neyman-Pearson-Test ist also der randomisierte Test $\varphi(X)$ mit

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } r(X_1, \dots, X_n) > c \\ q & \text{wenn } r(X_1, \dots, X_n) = c \\ 0 & \text{wenn } r(X_1, \dots, X_n) < c \end{cases}$$

Für Realisierungen x_1, \dots, x_n wird die Nullhypothese also verworfen, falls

$$\frac{3^n}{2^{x_1 + \dots + x_n}} > c \iff n \cdot \log_2(3) - \log_2(c) > x_1 + \dots + x_n$$

oder falls

$$n \cdot \log_2(3) - \log_2(c) = cx_1 + \dots + x_n \text{ und } y = 1,$$

wobei $y = Y(\omega)$ die Realisierung einer von X unabhängigen Zufallsvariable $Y \sim \text{Ber}(q)$ ist.

Aufgabe 13.2 [Neyman–Pearson-Lemma]

Sei $\Theta = (0, \infty)$ und seien X_1, \dots, X_{10} unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Poisson}(\theta)$ unter P_θ .

- (a) Konstruiere einen Test¹ $\varphi(X)$ für die Nullhypothese $\Theta_0 = \{1/2\}$ und die Alternativhypothese $\Theta_1 = \{2\}$ mit Signifikanzniveau $\alpha = 0.2$, der zudem die folgende Eigenschaft erfüllt: Kein anderer (randomisierter) Test $\varphi'(X)$ hat sowohl eine kleinere Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art als auch eine kleinere Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.
- (b) Bestimme die Macht des in (a) konstruierten Tests.
- (c) Begründe, weshalb der in (a) konstruierte Test die gewünschte Eigenschaft erfüllt.

Hinweis: Verwende, dass $X_1 + \dots + X_{10} \sim \text{Poisson}(10\theta)$ unter P_θ .

Lösung 13.2

- (a) Wir wenden das Neyman-Pearson-Lemma (Notizen 15 (Seite 16); siehe auch Theorem 3.7 in <https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/sc/skript-2-de.pdf#page=31>) an. Der Likelihood-Quotient ist

$$\begin{aligned} r(x_1, \dots, x_{10}) &= \frac{L(x_1, \dots, x_{10}; \theta_1)}{L(x_1, \dots, x_{10}; \theta_0)} = \frac{e^{-10\theta_1} \prod_{i=1}^{10} \frac{\theta_1^{x_i}}{x_i!}}{e^{-10\theta_0} \prod_{i=1}^{10} \frac{\theta_0^{x_i}}{x_i!}} \\ &= e^{-10(\theta_1 - \theta_0)} \left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^{\sum_{i=1}^{10} x_i}. \end{aligned}$$

Statt des komplizierten Likelihood-Quotienten, können wir als Zufallsvariable auch

$$T := \sum_{i=1}^{10} X_i$$

wählen; wegen $\theta_1 > \theta_0$ ist nämlich $r(X)$ gross genau dann, wenn T gross ist (mathematischer ausgedrückt gibt es eine streng monoton steigende Bijektion $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, sodass $\eta(T) = r(X)$). Wir bestimmen nun das kleinste $\tilde{c} \in \mathbb{N}_0$ so, dass für $\tilde{K} = (\tilde{c}, \infty)$ der Test $\varphi(X) := \mathbb{1}_{T \in \tilde{K}}$ die Bedingung

$$P_{\theta_0}[\varphi(X) = 1] = P_{\theta_0}[T \in \tilde{K}] = P_{1/2}[T > \tilde{c}] \leq 0.2$$

erfüllt. Wegen der Äquivalenz $\tilde{c} < T \iff \eta(\tilde{c}) < \eta(T) = r(X)$ ist $\varphi(X) = \mathbb{1}_{T \in \tilde{K}} = \mathbb{1}_{r(X) > c}$ ein $(c, 0)$ -Neyman-Pearson-Test mit $c := \eta(\tilde{c})$. Für $q = 0$ (oder $q = 1$) ist ein (c, q) -Neyman-Pearson-Test ein klassischer (also kein randomisierter) Test und somit gilt $\mathbb{E}_\theta[\varphi(X)] = P_\theta[\varphi(X) = 1]$.

Für jedes $\theta \in \Theta$ ist $T \sim \text{Poisson}(10\theta)$ unter P_θ , da Summen von unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen wieder Poisson-verteilt sind (siehe Hinweis). Wegen $T \sim \text{Poisson}(5)$ unter $P_{1/2}$ ist also

$$P_{1/2}[T > \tilde{c}] = 1 - P_{1/2}[T \leq \tilde{c}] = 1 - \sum_{k=0}^{\tilde{c}} P_{1/2}[T = k] = 1 - \sum_{k=0}^{\tilde{c}} e^{-5} \frac{5^k}{k!},$$

und wir erhalten $\tilde{c} = 7$, weil $P_{1/2}[T > 6] = 1 - \sum_{k=0}^6 e^{-5} \frac{5^k}{k!} \approx 0.2378 \not\leq 0.2 = \alpha$ und $P_{1/2}[T > 7] = 1 - \sum_{k=0}^7 e^{-5} \frac{5^k}{k!} \approx 0.13337 \leq 0.2 = \alpha$.

- (b) Für den in (a) konstruierten $(\eta(7), 0)$ -Neyman-Pearson-Test $\varphi(X)$ bestimmen wir die Macht

$$\beta_{\theta_1} = \beta_2 = \mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(X)] = P_{\theta_1}[T \in \tilde{K}] + 0P_{\theta_1}[T = \tilde{c}] = P_2[T > 7] = 1 - \sum_{k=0}^7 e^{-20} \frac{20^k}{k!} \approx 0.9992,$$

wobei wir verwendet haben, dass $T \sim \text{Poisson}(20)$ unter P_2 .

- (c) Sei nun $\varphi'(X)$ ein anderer Test. Falls $\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi'(X)] > \mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(X)] = P_{\theta_0}[T \in \tilde{K}]$, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art bei $\varphi'(X)$ grösser. Andererseits gilt für den Fall $\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi'(X)] \leq \mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(X)]$ mit dem Neyman-Pearson-Lemma aus Notizen 15 (Seite 16), dass die Macht von $\varphi'(X)$ kleiner ist als die des $(c, 0)$ -Neyman-Pearson-Test $\varphi(X)$, das heisst, dass $\varphi'(X)$ eine grössere Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art hat.

¹Für diese Aufgabe sind nur klassische Tests und keine randomisierten Tests erlaubt.

Aufgabe 13.3 [Zweiseitiger z -Test]

Die durchschnittliche Fahrzeit von Zürich nach Bellinzona mit einem Intercity-Zug beträgt 146 Minuten. Mit dem Cisalpino werden die folgenden Zeiten gemessen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
152	145	141	137	145	146	139	147	138

Wir nehmen an, dass diese Werte Realisierungen einer u.i.v. Stichprobe X_1, \dots, X_n sind mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei μ ein unbekannter Parameter und $\sigma^2 = 9$ ist. Führen Sie einen geeigneten Test durch, um auf dem 5%-Niveau festzustellen, ob die mittlere Fahrzeit des Cisalpino von jener des Intercity abweicht.

Lösung 13.3

Da die Varianz $\sigma^2 = 9$ bekannt ist, liegt es nahe, in diesem Fall einen (zweiseitigen) z -Test² $\varphi(X) = \mathbb{1}_{T \in K_{\neq}}$ durchzuführen. Wir möchten also die Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0 := 146$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \mu \neq \mu_0$ testen und dabei die Zufallsvariable

$$T = \frac{\bar{X}_9 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{9}}$$

verwenden (siehe erstes Beispiel im Abschnitt 3.5 des [Skript Teil 2](#)). Unter P_{μ_0} ist $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$, und den kritischen Bereich wählen wir von der Form $K_{\neq} = (-\infty, c_{\neq}) \cup (c_{\neq}, \infty)$. Wir verwerfen also H_0 , falls $|T| > c_{\neq}$ für ein zu bestimmendes c_{\neq} ist. Da wir auf dem 5%-Niveau testen möchten, wählen wir c_{\neq} so, dass

$$0.05 = \alpha = P_{\mu_0}[T \in K_{\neq}] = 2(1 - \Phi(c_{\neq}))$$

gilt, wobei Φ die Verteilungsfunktion (CDF) der Standardnormalverteilung ist. Das ergibt den Wert $c_{\neq} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Der realisierte Wert der Zufallsvariable T ist

$$T(\omega) = t(x_1, \dots, x_n) = -2.67.$$

Wegen $|T(\omega)| > 1.96$ gilt $\varphi(X) = 1$ und somit verwerfen wir also die Hypothese, dass die mittlere Fahrzeit des Cisalpino von jener des Intercity nicht abweicht. Würden wir stattdessen testen ob wir die Hypothese $H'_0 : \mu \geq \mu_0$ verwerfen können (zugunsten von $H'_1 : \mu < \mu_0$), so wäre $K_{<} = (-\infty, c_{<})$ mit $c_{<} = \Phi^{-1}(0.05) = -\Phi^{-1}(0.95) = -1.645$. Wegen $T(\omega) = -2.67 \in K_{<}$ wird auch hier die Hypothese verworfen; die Daten weisen also darauf hin (aber sie beweisen nicht), dass der Cisalpino im Mittel eine kürzere Fahrzeit hat.

Aufgabe 13.4 [z -Test und P-Wert]

Eine Klimaanlage schafft es, die Raumtemperatur bis auf eine Standardabweichung σ von 0.5 Grad Celsius konstant zu halten. Die angestrebte Raumtemperatur beträgt 20.00 Grad Celsius. An zehn aufeinanderfolgenden Tagen wurden die folgenden Temperaturen gemessen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
20.71	19.76	20.56	21.39	21.00	19.67	20.92	20.31	20.39	20.72

Wir nehmen an, dass die gemessenen Temperaturen unabhängig voneinander und identisch normalverteilt sind.

²In der Literatur werden Tests der Form $\varphi(X) = \mathbb{1}_{Z \in K}$ als „ z -Test“ bezeichnet, wenn $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ gilt. Der historische Grund dafür ist wahrscheinlich, dass einige Lehrbüchern einer Konvention folgen bei der standardnormalverteilte Zufallsvariablen gerne der Variablenname „ Z “ gegeben wird. Hier verwenden wir aber den Variablenname „ T “ für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable entgegen dieser Konvention. Trotzdem handelt es sich immer noch um einen z -Test, weil hier $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$ gilt. (Falls $T \sim t_{n-1}$ gelten würde, wäre $\mathbb{1}_{T \in K}$ ein t -Test. Somit sind t -Tests hilfreich, wenn die Standardabweichung σ unbekannt wäre.)

- (a) Führe einen geeigneten Test auf dem 5%-Niveau durch, um zu beurteilen, ob die Klimaanlage wirklich auf den Sollwert von 20.00 Grad geeicht ist.
- (b) Berechne den realisierten P-Wert.

Lösung 13.4

- (a) Sei X_1, \dots, X_{10} die Stichprobe, also die gemessenen Temperaturen. Unter den gemachten Annahmen sind X_1, \dots, X_{10} unabhängig und je $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt unter P_μ , wobei μ ein unbekannter Parameter und $\sigma = 0.5$ ist. Als Nullhypothese und Alternativhypothese wählen wir

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 20 \quad \text{und} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Unter den gemachten Annahmen ist es naheliegend einen z -Test $\varphi(X) = \mathbb{1}_{T \in K_\neq}$ durchzuführen (siehe Beispiele im Abschnitt 3.5 des [Skript Teil 2](#)). Wir wählen als Zufallsvariable also

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_{10} - 20}{0.5/\sqrt{10}}.$$

Unter H_0 gilt $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$, und wir wählen als Verwerfungsbereich $K_\neq = (-\infty, -c_\neq) \cup (c_\neq, \infty)$. Wir verwerfen also H_0 , falls $|T| > c_\neq$ für ein zu bestimmendes c_\neq ist. Da wir auf dem 5%-Niveau testen möchten, wählen wir c_\neq so, dass

$$0.05 = \alpha = P_{\mu_0}[\varphi(X) = 1] = P_{\mu_0}[T \in K_\neq] = 2(1 - \Phi(c_\neq))$$

gilt. Das ergibt den Wert $c_\neq = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Der realisierte Wert der Zufallsvariable T ist

$$T(\omega) = t(x_1, \dots, x_{10}) = 3.4342.$$

Wegen $|T(\omega)| > 1.96$ verwerfen wir also die Hypothese, dass die Klimaanlage die angestrebte Raumtemperatur von 20.00 Grad Celsius im Mittel erreicht.

- (b) Der realisierte P-Wert ist

$$G(|T|(\omega)) = P_{\mu_0}[|T| > 3.43] = 2P_{\mu_0}[T > 3.43] = 2(1 - \Phi(3.43)) \approx 0.0006.$$

Bemerkung: Wir haben hier die Definition von [Notizen 15 \(Seite 21\)](#) verwendet, wobei wir $(\varphi_c)_{c \in \mathbb{R}}$ als $\varphi_c(X) = \mathbb{1}_{|T| > c}$ definieren, wobei hier $|T|$ unsere Teststatistik ist.

Intuition: Ein P-Wert von 0.0006 bedeutet, dass wir, basierend auf dem erhaltenen Messresultat von $|T| = 3.43$, H_0 zum Beispiel auch auf dem Signifikanzniveau $0.0007 = 0.07\%$ verwerfen hätten können, aber nicht auf dem Signifikanzniveau $0.0005 = 0.05\%$.

Umgangssprachliche Intuition: Umgangssprachlich wird manchmal behauptet, dass das Messresultat von $T = 3.43$ bedeutet, dass „die Nullhypothese mit Wahrscheinlichkeit 0.0006 richtig ist“. Streng genommen macht diese Aussage mathematisch keinen Sinn und ist falsch. Ausdrücke wie „ $P(H_0) = 0.0006$ “ oder „ $P(H_0 | |T| = 3.43) = 0.0006$ “ sind nicht definiert, weil H_0 kein Zufälliges Ereignis in unserer Modellierungssprache ist. In der Praxis geht diese (mathematisch falsche) Umgangssprachliche Intuition ungefähr in die richtige Richtung, wenn der P-Wert sehr klein ist. In der Praxis ist ein extrem kleiner P-Wert oft ein deutliches Indiz dafür, dass die Nullhypothese als unplausibel angesehen werden sollte. Umgekehrt muss man aber aufpassen, dass ein P-Wert von 99.999999999% typischerweise KEIN starkes Indiz dafür ist, dass die Nullhypothese richtig ist. Die Modellierungssprache die wir hier in diesem Kurs verwenden wird als frequentistische Statistik bezeichnet. Eine alternative Modellierungssprache, die im Statistik-Teil dieses Kurses nicht verwendet wurde, ist die Bayesianische Statistik. In Bayesianische Statistik wird H_0 auch als Zufälliges Ereignis interpretiert und darum kann dort die Gleichung $P(|T| = 3.43 | H_0) = 0.0006$ aufgestellt werden, die in der frequentistischen Statistik streng-genommen nicht wohldefiniert ist.

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das [Forum](#) (oder eine Mail an [Jakob Heiss](#)).