Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 2

Version 3 (18. März 2024: Der Fall $n = 0$ wird in Lösung von Aufgabe 2.5(d) jetzt korrekt behandelt. Am Ende der Lösung Lösung von Aufgabe 2.5 wurden kleine Bemerkungen hinzugefügt.), Version 2 (17. März: Tippfehler in der Lösung von Aufgabe 2.2(1)(b) und (2)(b) ausgebessert. Zusätzliche Erklärungen in den Lösusubprob::AnInFNngen.), Version 1 (14. März)
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **12. März** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **14. März 8:00**. Nachher kann selbstständig mit dieser Lösung verglichen werden.

Aufgabe 2.1 (Independences) Alix has four books: a mathematics book, a biology book, a chemistry book and a mathematics-biology-chemistry book. Alix chooses one of the four books at random, with uniform probability. Denote by M, B and C the events "the chosen book has mathematics in it" (respectively biology, chemistry). Are the events M, B and C independent?

Lösung 2.1 To model this problem, consider the probability space $\Omega = \{m, b, c, mbc\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ and P the uniform probability on Ω, so that $M = \{m, mbc\}$, $B = \{b, mbc\}$ and $C = \{c, mbc\}$. Note that $M \cap B = M \cap C = B \cap C = \{mbc\}$. So

$$\mathrm{P}\left(M \cap B\right) = \frac{1}{4} = \mathrm{P}\left(M\right)\mathrm{P}\left(B\right), \quad \mathrm{P}\left(M \cap C\right) = \frac{1}{4} = \mathrm{P}\left(M\right)\mathrm{P}\left(C\right), \quad \mathrm{P}\left(B \cap C\right) = \frac{1}{4} = \mathrm{P}\left(B\right)\mathrm{P}\left(C\right).$$

Thus, the events M, B, C are pairwise independent.

However,

$$\mathrm{P}(M \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathrm{P}\left(M\right)\mathrm{P}\left(B\right)\mathrm{P}\left(C\right),$$

so events M, B, C are not (mutually) independent.

Aufgabe 2.2 (Cylinders) Sasha models coin tosses as follows. Let $\Omega = \{0, 1\}^{\{1,2,3,\dots\}}$, so that an element of Ω is a sequence of 0 and 1's. For $\omega = (\omega_n)_{n\geq 1} \in \Omega$ we interpret ω_k as the result of the k-th throw (1 for heads, 0 for tails). For all $k \geq 1$ and $u_1, \dots, u_k \in \{0, 1\}$ we define the following set, called a cylinder:

$$C_{u_1,u_2,\dots,u_k} = \{(\omega_n)_{n\geq 1} : \omega_1 = u_1, \dots, \omega_k = u_k\}, \tag{1}$$

(1) Express (using unions, intersections and complements) the following events in terms of sets of type (1) :
  (a) B_n: "We get tails for the first time on the nth throw"
  (b) A : "The result of the second throw is tails".
  (c) C: "You never get tails".
  (d) D_n: "you get tails at least twice in the first n throws".

We assume the existence the existence of a probability P on $(\Omega, \mathcal{A})$, where $\mathcal{A}$ is the σ-field generated by sets of the form (1) (cylinder σ-algebra) such that

$$\mathrm{P}\left(C_{u_1,u_2,\dots,u_k}\right) = \frac{1}{2^k}. \tag{2}$$

(2) Compute the probabilities of the previous events A, B_n, C, D_n.

Lösung 2.2

(1) We have

$$B_n = C_{\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-1 \text{ times}},0}, \quad A = C_{0,0} \cup C_{1,0}, \quad C = C_1 \cap C_{1,1} \cap C_{1,1,1} \cap \cdots$$

and

$$D_n = (C_{1,1,\dots,1} \cup C_{0,1,\dots,1} \cup C_{1,0,1,\dots,1} \cup \dots \cup C_{1,1,\dots,0})^c = {C_{1,1,\dots,1}}^c \cap {C_{0,1,\dots,1}}^c \cap {C_{1,0,1,\dots,1}}^c \cap \dots \cap {C_{1,1,\dots,0}}^c.$$

(2) First of all, all these events are in the cylinder σ-field by the first question. We have $\mathrm{P}(B_n) = 1/2^n$ by definition of P, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(C_{0,0}) + \mathrm{P}(C_{1,0}) = 1/4 + 1/4 = 1/2$. To calculate $\mathrm{P}(C)$, enter $C_n = C_{1,1,\ldots,1}$ where 1 appears n times. Then $C = \bigcap_{n\geq 0} C_n$ and the events C_n are decreasing in n, so (decreasing limit property)

$$\mathrm{P}(C) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(C_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

To calculate $\mathrm{P}(D_n)$, given the expression for D_n, it's natural to use the complementary event:

$$\mathrm{P}(D_n) = 1 - \mathrm{P}({D_n}^c) = 1 - \left(\mathrm{P}(C_{1,1,\ldots,1}) + \mathrm{P}(C_{0,1,\ldots,1}) + \mathrm{P}(C_{1,0,1,\ldots,1}) + \cdots \mathrm{P}(C_{1,1,\ldots,0})\right),$$

which is therefore $1 - \frac{n+1}{2^n}$.

Aufgabe 2.3 Let $(A_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of independent events on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Show that

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \prod_{n\geq 1} \mathrm{P}(A_n).$$

Lösung 2.3 Write

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \mathrm{P}(A_n) = \prod_{n\geq 1} \mathrm{P}(A_n).$$

The first equality comes from the fact that the sequence of events $\bigcap_{n=1}^{N} A_n$ is decreasing in N (see Theorem "Stetigkeit von Massen" in Notes 2 (page 11)), the second equality comes from the fact that $A_1, \ldots, A_N$ are independent, and the last equality comes from the definition of the infinite product.

Aufgabe 2.4 Let $(\mathcal{F}_n)$ be a sequence of independent σ-fields and consider a bijection $\sigma\colon \{1,2,3,\ldots\} \to \{1,2,3,\ldots\}$. Show that $(\mathcal{F}_{\sigma(n)})$ is still a sequence of independent σ-fields.

Lösung 2.4 Let us fix $n \geq 1$ and let $\{i_1, \ldots, i_k\}$ be an arbitrary subset of $\{1, \ldots, n\}$. Take arbitrary $A_{i_1} \in \mathcal{F}_{\sigma(i_1)}, \ldots, A_{i_k} \in \mathcal{F}_{\sigma(i_k)}$. Let m the biggest element of $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$. Since the sequence $(\mathcal{F}_n)$ is independent we know that $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ are independent. In particular, given that $\{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k)\} \subset \{1, \ldots, m\}$, we have that

$$\mathrm{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathrm{P}(A_{i_1}) \cdots \mathrm{P}(A_{i_k}).$$

which shows the independence of $\mathcal{F}_{\sigma(i_1)}, \ldots, \mathcal{F}_{\sigma(i_k)}$ and therefore the independence of $(\mathcal{F}_{\sigma(n)})$.

Aufgabe 2.5 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\Omega = [0,1)$ ist und P das Lebesgue-Mass auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathfrak{B}([0,1))$ ist. Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Teil-σ-Algebra

$$\mathcal{F}_n := \sigma(\mathcal{E}_n),$$

mit

$$\mathcal{E}_n := \left\{ \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) : k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\} \right\}.$$

(a) Beweise, dass $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ gilt.

(b) Wie viele Elemente hat $\mathcal{F}_n$?

Hinweis: Verwende, dass $\mathcal{E}_n := \left\{ \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) : k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\} \right\}$ eine Partition von Ω ist. Daraus kannst du folgern, dass sich jede Menge in $\mathcal{F}_n$ als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{E}_n$ dargestellt werden kann (und natürlich ist umgekehrt jede dieser Verneinungen auch in $\mathcal{F}_n$).

(c) Wir definieren

$$A_n = \bigcup_{\substack{0\leq k\leq 2^n-1,\\ k \text{ gerade}}} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right).$$

Zeichne A_n. Für welche $N \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \in \mathcal{F}_N$?

(d) Berechne $\mathrm{P}(A_n)$.

(e) Sei $m < n$. Beweise, dass
$$\forall A \in \mathcal{F}_m : \mathrm{P}\left(A \cap A_n\right) = \frac{1}{2}\mathrm{P}\left(A\right).$$

(f) Folgere daraus, dass $(A_n)_{n\geq 1}$ unabhängig sind.

Lösung 2.5

(a) Aus $\mathcal{E}_n \subset \sigma\left(\mathcal{E}_{n+1}\right)$ folgt $\sigma\left(\mathcal{E}_n\right) \subset \sigma\left(\mathcal{E}_{n+1}\right)$.[1] Die Inklusion $\mathcal{E}_n \subset \sigma\left(\mathcal{E}_{n+1}\right)$ gilt, weil
$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right) = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right) \in \sigma\left(\mathcal{E}_{n+1}\right).$$

(b) $|\mathcal{F}_n| = 2^{2^n}$ Zuerst beweise wir die Aussage des Hinweis
$$\mathcal{F}_n = \left\{ \bigsqcup_{k\in I} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) : I \subset \{\, 0, \ldots, 2^n - 1 \,\} \right\} =: \tilde{\mathcal{F}}_n.$$

Beweis des Hinweis. Wir zeigen $\mathcal{F}_n = \tilde{\mathcal{F}}_n$ mithilfe der Antisymmetrie der Teilmengenrelation (double inclusion):
"$\subset$": Wir zeigen hierfür, dass $\tilde{\mathcal{F}}_n$ eine σ-Algebra ist:

- $$\varnothing = \bigsqcup_{k\in\varnothing} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \in \tilde{\mathcal{F}}_n.$$
- $$\left(\bigsqcup_{k\in I} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)^{\complement} = \bigsqcup_{k\in I^{\complement}} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \in \tilde{\mathcal{F}}_n.$$ [2]
- $$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigsqcup_{k\in I_j} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) = \bigsqcup_{k\in \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \in \tilde{\mathcal{F}}_n.$$

"$\supset$": Die andere Richtung $\mathcal{F}_n \supset \tilde{\mathcal{F}}_n$ ist trivial.
Somit gilt $\mathcal{F}_n = \tilde{\mathcal{F}}_n$. □

Altenrativer Beweis des Hinweis. $\mathcal{C}_n := \mathcal{E}_n \cup \{\varnothing\}$ ist durchschnittsstabil, weil
$$\forall C, C' \in \mathcal{C}_n : C \cap C' = \begin{cases} \varnothing, & \text{if } C \neq C' \\ C, & \text{if } C = C' \end{cases}$$
gilt. Somit ist $\mathcal{C}_n$: ein π-System. Ausserdem sehen wir, dass
$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\mathcal{E}_n\right) = \sigma\left(\mathcal{C}_n\right) = \lambda\left(\mathcal{C}_n\right)$$
gilt, wobei die letzte Gleichheit aus dem Dynkin π-λ-System Theorem (siehe Notizen 2 (Seite 8)) folgt. Wir zeigen $\lambda(\mathcal{C}_n) = \tilde{\mathcal{F}}_n$ mithilfe der Antisymmetrie der Teilmengenrelation (double inclusion):
"$\subset$": Wir zeigen hierfür, dass $\tilde{\mathcal{F}}_n$ ein λ-System ist:

- $$\varnothing = \bigsqcup_{k\in\varnothing} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \in \tilde{\mathcal{F}}_n.$$
- $$\left(\bigsqcup_{k\in I} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)^{\complement} = \bigsqcup_{k\in I^{\complement}} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \in \tilde{\mathcal{F}}_n.$$

[1] Notation: Die Symbole "$\subsetneq$" und "$\subseteq$" sind unmissverständlich. In dieser Lehrveranstaltung wird "$\subset$" gleichbedeutend mit "$\subseteq$" verwendet. Im allgemeinen folgt aus $\mathcal{A} \subsetneq \sigma\left(\mathcal{B}\right)$ zwar $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$ aber *nicht* immer $\sigma(\mathcal{A}) \subsetneq \sigma(\mathcal{B})$. Hier in diesem Beispiel würde allerdings sogar $\mathcal{F}_n \subsetneq \mathcal{F}_{n+1}$ gelten.

[2] Wir definieren $I^{\complement} := \{\, 0, \ldots, 2^n - 1 \,\} \setminus I$.

- $$\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} \bigsqcup_{k\in I_j} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) = \bigsqcup_{k\in\bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \in \tilde{\mathcal{F}}_n.$$

"$\supset$": Die andere Richtung $\lambda(\mathcal{C}_n) \supset \tilde{\mathcal{F}}_n$ ist trivial.

Somit gilt $\mathcal{F}_n = \tilde{\mathcal{F}}_n$. □

Mithilfe der expliziten Darstellung $\tilde{\mathcal{F}}_n$ von $\mathcal{F}_n$ sieht man direkt, dass

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathcal{P}(\{0,\ldots,2^n-1\}) &\to \tilde{\mathcal{F}}_n \\ I &\mapsto \varphi(I) := \bigsqcup_{k\in I} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \end{aligned}$$

eine Bijektion ist. Somit gilt $|\mathcal{F}_n| = |\mathcal{P}(\{0,\ldots,2^n-1\})| = 2^{|\{0,\ldots,2^n-1\}|} = 2^{2^n}$.

(c) Wir zeichnen A_n in Abbildung 1.

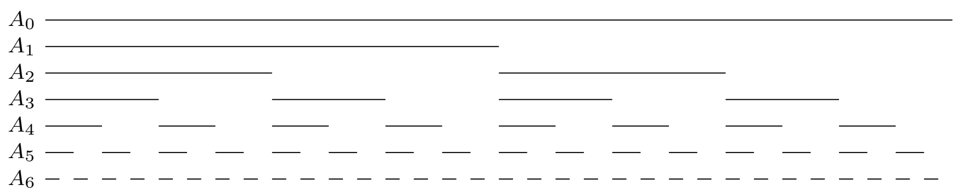

Abbildung 1: Wir visualisieren die Mengen A_n mit durchgezogenen schwarzen Linien. Beachte, dass jedes der schwarzen Segemente den linken Rand enthält, aber nicht den rechten (wobei ich in TikZ keinen einfachen Weg gefunden habe das zu visualisieren).

Man sieht direkt, dass $A_n \in \mathcal{F}_n$ gilt. Darum folgt aus (a) (mithilfe einer trivialen vollständigen Induktion), dass $A_n \in \mathcal{F}_N$ für alle $N \geq n$ gilt.

Umgekehrt müssen wir noch zeigen, dass $A_n \notin \mathcal{F}_N$ für alle $N < n$ gilt: Der Hinweis in (b) gibt uns eine explizite Form aller Elemente von $\mathcal{F}_N = \tilde{\mathcal{F}}_N$. Jede Menge $B = \bigsqcup_{k\in I} \left[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right) \in \mathcal{F}_N$ erfüllt, dass die Implikation $\left[\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right) \subset B \implies \left[\frac{0}{2^N}, \frac{1}{2^N}\right) \subset B$ gilt. Für $N < n$ bedeutet das, dass die Implikation $\left[\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right) \subset B \implies \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1+1}{2^n}\right) \subset B$. Im Gegensatz dazu erfüllt A_n, dass $\left[\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right) \subset A_n$ und $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1+1}{2^n}\right) \not\subset B$ gilt. Somit, kann A_n kein Element von $\mathcal{F}_N$ sein, für $N < n$. Zusammenfassend erhalten wir $A_n \in \mathcal{F}_N \iff N \geq n$.

(d) Man sieht sofort, dass $\mathrm{P}(A_0) = \mathrm{P}([0,1)) = 1$. Für $n \geq 1$, berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_n) &= \mathrm{P}\left(\bigsqcup_{\substack{0\leq k\leq 2^n-1,\\ k \text{ gerade}}} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) \\ &= \sum_{\substack{0\leq k\leq 2^n-1,\\ k \text{ gerade}}} \mathrm{P}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) \\ &= \sum_{\substack{0\leq k\leq 2^n-1,\\ k \text{ gerade}}} \frac{1}{2^n} \\ &= |\{0 \leq k \leq 2^n-1 : k \text{ gerade}\}| \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{2^n}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(Zusätzlich kann man auch in Abbildung 1 sehen, dass die hälfte der Länge jeder Zeile mit $n \geq 1$ schwarz ist und die andere Hälfte weiss.)

(e) Der Hinweis in (b) sagt uns, dass für alle $A \in \mathcal{F}_m$ eine Menge $I \subset \{0, \dots, 2^n - 1\}$ existiert sodass sich $A = \bigsqcup_{k \in I} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ explizit darstellen lässt. Seim $m < n$, dann gilt für alle $A \in \mathcal{F}_m$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cap A_n) &= \mathrm{P}\left(\bigsqcup_{k \in I}\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right) \cap A_n\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigsqcup_{k \in I}\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right) \cap A_n\right)\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigsqcup_{k \in I}\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right) \cap \bigsqcup_{\substack{0 \le j \le 2^n - 1, \\ j \text{ gerade}}}\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)\right)\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigsqcup_{k \in I}\left(\left[\frac{2^{n-m}k}{2^n}, \frac{2^{n-m}k + 2^{n-m}}{2^n}\right) \cap \bigsqcup_{\substack{0 \le j \le 2^n - 1, \\ j \text{ gerade}}}\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)\right)\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigsqcup_{k \in I}\left(\bigsqcup_{\substack{2^{n-m}k \le j \le 2^{n-m}k + 2^{n-m} - 1, \\ j \text{ gerade}}}\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)\right)\right) \\
&= \sum_{k \in I}\left(\sum_{\substack{2^{n-m}k \le j \le 2^{n-m}k + 2^{n-m} - 1, \\ j \text{ gerade}}} \mathrm{P}\left(\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)\right)\right) \\
&= \sum_{k \in I}\left(\sum_{\substack{2^{n-m}k \le j \le 2^{n-m}k + 2^{n-m} - 1, \\ j \text{ gerade}}} \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \sum_{k \in I}\left(\frac{2^{n-m}}{2}\frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k \in I}\left(\frac{1}{2^m}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k \in I}\mathrm{P}\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\bigsqcup_{k \in I}\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(A).
\end{aligned}
$$

□

Die Intuition hinter dieser Rechnung ist, dass jedes Teilintervall $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)$ von $A \in \mathcal{F}_m$ genau zur Hälfte in A_n liegt, weil jedes Teilintervall $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)$ in 2^{n-m} Teil-Teilintervalle gleicher Länge aufgespalten werden kann, von denen genau jedes zweite in A_n liegt (siehe Abbildung 1).

Alternativer Beweis: Man kann leicht zeigen, dass $\mathcal{C}_n := \mathcal{E}_n \cup \{\varnothing\}$ ein π-System ist (siehe *Altenrativer Beweis des Hinweis* in der Lösung von (b)). Somit reicht es aufgrund des Korrolars in Notizen 3 (Seite 11) einfach nur zu zeigen, dass

$$\forall A \in \mathcal{C}_m : \mathrm{P}(A \cap A_n) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(A).$$

gilt. Für $A \in \mathcal{C}_m$ vereinfacht sich die obige Rechnung deutlich.

(f) Paarweise Unabhängigkeit bekommt man direkt aus der vorherigen Aufgabe, wenn man $A = A_m \in \mathcal{F}_m$ wählt und somit $\mathrm{P}(A_m \cap A_n) = \mathrm{P}(A_m)\frac{1}{2} = \mathrm{P}(A_m)\mathrm{P}(A_n)$ erhält. Im allgemeinen folgt aber aus paarweiser Unabhängigkeit nicht automatisch die Unabhängigkeit aller A_n. Daher ist der Beweis noch nicht fertig.

Wir müssen zeigen, dass für jede endliche Teilmenge $J \subset \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P[A_j] \tag{3}$$

gilt (siehe Definition in Notizen 3 (Seite 6)). Wir sortieren die Indizes in $J = \{ j_1, j_2, \ldots, j_m \}$, sodass $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$ gilt.

Wir nutzen eine vollständige Induktion in m um (3) zu zeigen.

Induktionsanfang: Für $m = 0$ [3] und $m = 1$ ist (3) trivial. (Für $m = 2$ haben wir die (3) schon gerade eben für die paarweise Unabhängigkeit gezeigt.)

Induktionsannahme:

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in\{ j_1,\ldots,j_m \}} A_j\right) = \prod_{j\in\{ j_1,\ldots,j_m \}} P[A_j]. \tag{4}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in\{ j_1,\ldots,j_{m+1} \}} A_j\right) &= \mathrm{P}\left(\underbrace{\bigcap_{j\in\{ j_1,\ldots,j_m \}} A_j}_{\in\mathcal{F}_m} \cap A_{m+1}\right) \\
&\overset{(e)}{=} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in\{ j_1,\ldots,j_m \}} A_j\right)\frac{1}{2} \\
&\overset{(4)}{=} \prod_{j\in\{ j_1,\ldots,j_m \}} P[A_j]\frac{1}{2} \overset{(d)}{=} \prod_{j\in\{ j_1,\ldots,j_{m+1} \}} P[A_j].
\end{aligned}$$

Update: Beachte, dass wir im Schritt (e) $m+1 \geq 1$ verwenden und somit kein Problem mit $\mathrm{P}(A_0) = 1$ haben. Die Aussage

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in\{ j_1,\ldots,j_m \}} A_j\right) = \prod_{j\in\{ j_1,\ldots,j_m \}} \frac{1}{2}.$$

wäre streng-genommen falsch, weil $j_1 = 0$ gelten könnte. □

Bemerkung: Die Menge A_n ist für $n \geq 1$ die Menge aller reellen Zahlen in $[0, 1)$, deren n-te binäre Ziffer nach dem Komma gleich null ist.

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).

[3] In dieser Lehrveranstaltung verwenden wir die übliche Konvention $\bigcap_{j\in\varnothing} C_j = \Omega$ und $\prod_{j\in\varnothing} c_j = 1$. (Nach dem selben Prinzip sagen wir $\bigcup_{j\in\varnothing} C_j = \varnothing$ und $\sum_{j\in\varnothing} c_j = 0$.)