

# Wahrscheinlichkeit und Statistik

## Lösungen Serie 3

Lösung Version 1 (21. März 2024: basierend auf Serie Version 2 (15. März: In [Aufgaben 3.1](#) und [3.2](#) fehlten die Definitionen der Wahrscheinlichkeitsmasse, die jetzt hinzugefügt wurden. Tippfehler (zB im Index des Produkts in [Aufgabe 3.2](#)) wurden ausgebessert. Und Hinweise mit Links zu den [Notizen 4](#) wurden hinzugefügt.), Version 1 (14. März))

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im [Forum](#).

Bitte stell sicher, dass du die Webseite <https://kahoot.it/> in der Übung am **19. März** öffnen kannst. Freiwillige [Abgabe](#) bis **21. März 8:00**. Nachher kann selbstständig mit dieser Lösung verglichen werden.

**Aufgabe 3.1** Sei  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum auf  $\Omega = \{0, 1\}^2$  mit  $P(\cdot) = \frac{1}{4}$ .<sup>1</sup> Wir definieren die Zufallsvariable

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto X(\omega) := \omega_1 + \omega_2.$$

- (a) Gib ein Beispiel einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  auf  $\Omega$ , sodass  $X$  nicht messbar bezüglich  $\mathcal{F}$  ist.
- (b) Wie lautet die von  $X$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(X)$ ?  
*Hinweis: Die Definition der erzeugten  $\sigma$ -Algebra ist in [Notizen 4 \(Seite 3\)](#).*
- (c) Wie lautet  $\mu_X$  und  $F_X$ ? Zeichne  $F_X$ .  
*Hinweis: Die Definitionen sind in [Notizen 4 \(Seite 10\)](#) und [Notizen 4 \(Seite 11\)](#).*

### Lösung 3.1

- (a) Ein triviales Beispiel, ist die triviale  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ . Damit  $X$  messbar bezüglich  $\mathcal{F}$  wäre müsste gelten, dass

$$\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Oder äquivalent dazu (siehe Satz aus [Notizen 4 \(Seite 3\)](#)) müsste gelten, dass

$$\forall a \in \mathbb{R} : X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F},$$

weil  $\mathcal{E} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$  ein Erzeugendensystem von  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  ist (siehe Satz aus [Notizen 2 \(Seite 5\)](#)).

Beispielsweise,  $X^{-1}((-\infty, 0]) = \{(0, 0)\} \notin \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ .

An diesem Beispiel sieht man, dass es auch viele andere Beispiele gäbe, z.B.:

$$\tilde{\mathcal{F}} = \left\{ \emptyset, \{(0, 0), (1, 1)\}, \{(0, 0), (1, 1)\}^c, \Omega \right\}.$$

- (b) Nach der Definition aus [Notizen 4 \(Seite 3\)](#) gilt

$$\sigma(X) = \{ X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \},$$

weil im Fall von Zufallsvariablen immer die Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  auf dem Zielraum  $\mathbb{R}$  verwendet wird – also  $X : (\Omega, \sigma(X)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ . Mithilfe der Sätze aus [Notizen 2 \(Seite 5\)](#) und [Notizen 4 \(Seite 3\)](#) erhalten wir die einfachere Darstellung

$$\sigma(X) = \sigma \left( \{ X^{-1}((-\infty, a]) : a \in \mathbb{R} \} \right).$$

---

<sup>1</sup>Wahrscheinlichkeitsräume der Form  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  mit  $P(\cdot) = \frac{1}{|\Omega|}$  werden als Laplace-Modelle bezeichnet. Zu jedem endlichen  $\Omega$  gibt es somit genau ein Laplace-Modell auf  $\Omega$ . Z.B. der Wahrscheinlichkeitsraum in [Aufgabe 3.2](#) ist auch ein Laplace-Modell.

Für unsere Zufallsvariable  $X$ , können wir direkt sehen, dass  $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ . Intuitiv kann man schon ahnen, dass

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= \sigma(\{X^{-1}(\emptyset), X^{-1}(\{0\}), X^{-1}(\{0, 1\}), X^{-1}(\{0, 1, 2\})\}) \\ &= \sigma(\{X^{-1}(\{0\}), X^{-1}(\{1\}), X^{-1}(\{2\})\})\end{aligned}$$

gilt, aber wir beweisen diese Idee mathematisch präzise für allgemeine Zufallsvariablen die  $|X(\Omega)| \leq \aleph_0$  erfüllen.

**Lemma 3.1.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X$  eine Zufallsvariable mit  $|X(\Omega)| \leq \aleph_0$ , dann gilt

$$\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(\{x\}) : x \in X(\Omega)\}) = \left\{ \bigsqcup_{x \in I} X^{-1}(\{x\}) : I \subset X(\Omega) \right\}.$$

*Beweis.* Weil  $\mathcal{E} := \{X^{-1}(\{x\}) : x \in X(\Omega)\}$  eine Partition von  $\Omega$  ist, kann man die zweite Gleichheit  $\sigma(\{X^{-1}(\{x\}) : x \in X(\Omega)\}) = \left\{ \bigsqcup_{x \in I} X^{-1}(\{x\}) : I \subset X(\Omega) \right\}$  analog zur [Lösung der Aufgabe 2.5\(b\)](#) beweisen. Für den Beweis der ersten Gleichheit schauen wir die Elemente von  $\sigma(X)$  genauer an:

$$X^{-1}(B) = X^{-1}(B \cap X(\Omega)) = \bigsqcup_{x \in B \cap X(\Omega)} X^{-1}(\{x\}).$$

Somit gilt

$$\sigma(X) \subset \left\{ \bigsqcup_{x \in I} X^{-1}(\{x\}) : I \subset X(\Omega) \right\}.$$

Weil  $\{x\}$  abgeschlossen ist gilt  $\{x\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ . Das impliziert, dass

$$\sigma(X) \supset \sigma(\{X^{-1}(\{x\}) : x \in X(\Omega)\})$$

gilt. Wenn wir all diese Resultate aneinander reihen erhalten wir

$$\left\{ \bigsqcup_{x \in I} X^{-1}(\{x\}) : I \subset X(\Omega) \right\} = \sigma(\{X^{-1}(\{x\}) : x \in X(\Omega)\}) \subset \sigma(X) \subset \left\{ \bigsqcup_{x \in I} X^{-1}(\{x\}) : I \subset X(\Omega) \right\}$$

und somit

$$\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(\{x\}) : x \in X(\Omega)\}) = \left\{ \bigsqcup_{x \in I} X^{-1}(\{x\}) : I \subset X(\Omega) \right\}.$$

□

Mithilfe von [Lemma 3.1](#) können wir unsere Intuition bestätigen und erhalten für unser  $X$  direkt

$$\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(\{x\}) : x \in \{0, 1, 2\}\}) = \left\{ \bigsqcup_{x \in I} X^{-1}(\{x\}) : I \subset \{0, 1, 2\} \right\}.$$

Für unser  $X$  können wir  $X^{-1}(\{x\})$  direkt darstellen:

$$\begin{aligned}X^{-1}(\{0\}) &= \{(0, 0)\} \\ X^{-1}(\{1\}) &= \{(0, 1), (1, 0)\} \\ X^{-1}(\{2\}) &= \{(1, 1)\}.\end{aligned}$$

Schlussendlich erhalten wir

$$\sigma(X) = \{\emptyset, \{(1, 1)\}, \{(0, 1), (1, 0)\}, \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 0)\}, \{(0, 0), (1, 1)\}, \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}, \Omega\}.$$

(c) Nach der Definition aus [Notizen 4 \(Seite 10\)](#) gilt

$$\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : \mu_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

Weil  $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ , betrachten wir nur die 3 folgenden Wahrscheinlichkeiten

$$\mu_X(\{0\}) = P(X^{-1}(\{0\})) = P(\{(0, 0)\}) = \frac{1}{4}$$

$$\mu_X(\{1\}) = P(X^{-1}(\{1\})) = P(\{(0, 1), (1, 0)\}) = \frac{1}{2}$$

$$\mu_X(\{2\}) = P(X^{-1}(\{2\})) = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{4}$$

Daraus können wir schliessen, dass

$$\mu_X = \frac{1}{4}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2.$$

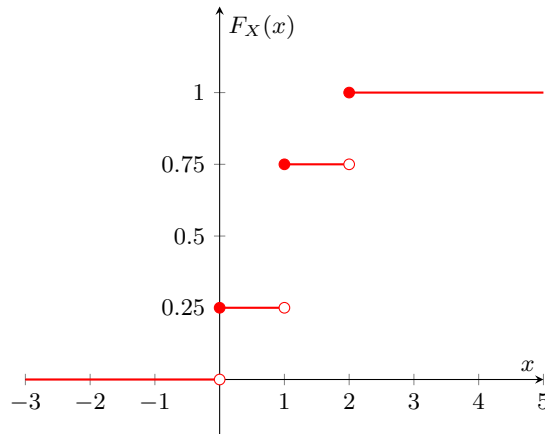
gilt.

Somit können wir direkt ablesen, dass

$$F_X(a) = P(X \leq a) = \mu_X((-\infty, a]) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{wenn } 0 \leq a < 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{wenn } 1 \leq a < 2 \\ 1, & \text{wenn } 2 \leq a \end{cases}$$

gilt (siehe die Definition in [Notizen 4 \(Seite 11\)](#)).

Intuitives Beispiel:  $F_X(1.25) = \mu_X((-\infty, 1.25]) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ , weil  $\delta_0((-\infty, 1.25]) = 1$  (weil  $0 \in (-\infty, 1.25]$ ),  $\delta_1((-\infty, 1.25]) = 1$  (weil  $1 \in (-\infty, 1.25]$ ) und  $\delta_2((-\infty, 1.25]) = 0$  (weil  $2 \notin (-\infty, 1.25]$ ).



**Aufgabe 3.2** Sei  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum auf  $\Omega = \{0, 1\}^n$  mit  $P(\cdot) = \frac{|\cdot|}{2^n}$ . Wir definieren die Zufallsvariable

$$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto Y(\omega) := \prod_{i=1}^n \omega_i.$$

- (a) Wie lautet die von  $Y$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(Y)$ ?
- (b) Wie lautet  $\mu_Y$  und  $F_Y$ ? Zeichne  $F_X$ .

**Lösung 3.2**

- (a) Wir wollen Lemma 3.1 aus Lösung 3.1 anwenden. Deshalb überlegen wir uns, dass  $Y(\Omega) = \{0, 1\}$  ist. Somit erhalten wir für unser  $Y$  direkt

$$\sigma(Y) = \sigma(\{Y^{-1}(\{y\}) : y \in \{0, 1\}\}) = \left\{ \bigsqcup_{y \in I} Y^{-1}(\{y\}) : I \subset \{0, 1\} \right\}.$$

Für unser  $Y$  können wir  $Y^{-1}(\{y\})$  direkt darstellen:

$$Y^{-1}(\{0\}) = \{\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ mal}}\}^c = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} : \omega_i = 0\}$$

$$Y^{-1}(\{1\}) = \{\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ mal}}\} = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : \omega_i = 1\}.$$

Schlussendlich erhalten wir

$$\sigma(Y) = \left\{ \emptyset, \{\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ mal}}\}, \{\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ mal}}\}^c, \Omega \right\}.$$

- (b) Nach der Definition aus Notizen 4 (Seite 10) gilt

$$\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : \mu_Y(B) = P(Y^{-1}(B))$$

Weil  $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ , betrachten wir nur die 3 folgenden Wahrscheinlichkeiten

$$\mu_Y(\{0\}) = P(Y^{-1}(\{0\})) = P\left(\{\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ mal}}\}^c\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\mu_Y(\{1\}) = P(Y^{-1}(\{1\})) = P\left(\{\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ mal}}\}\right) = \frac{1}{2^n}.$$

Daraus können wir schliessen, dass

$$\mu_Y = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \delta_0 + \frac{1}{2^n} \delta_1.$$

gilt.

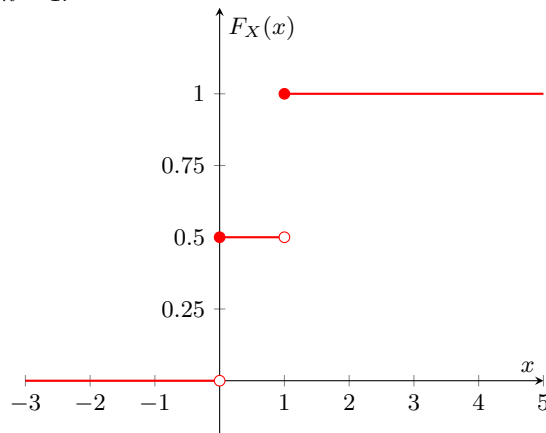
Somit können wir direkt ablesen, dass

$$F_Y(a) = P(Y \leq a) = \mu_Y((-\infty, a]) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ 1 - \frac{1}{2^n}, & \text{wenn } 0 \leq a < 1 \\ 1, & \text{wenn } 1 \leq a \end{cases}$$

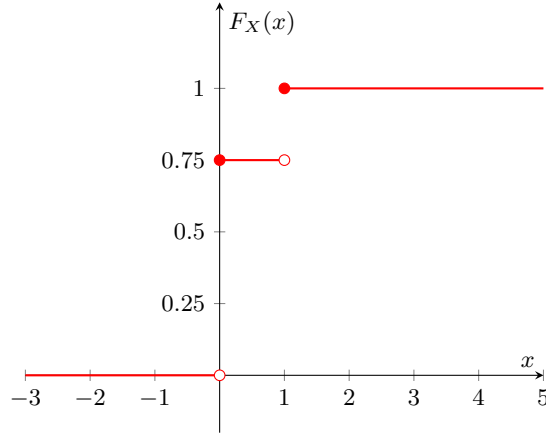
gilt (siehe die Definition in Notizen 4 (Seite 11)).

Intuitives Beispiel:  $F_Y(1.25) = \mu_Y((-\infty, 1.25)) = (1 - \frac{1}{2^n}) + \frac{1}{2^n} = 1$ , weil  $\delta_0((-\infty, 1.25)) = 1$  (weil  $0 \in (-\infty, 1.25)$ ) und  $\delta_1((-\infty, 1.25)) = 1$  (weil  $1 \in (-\infty, 1.25)$ ).

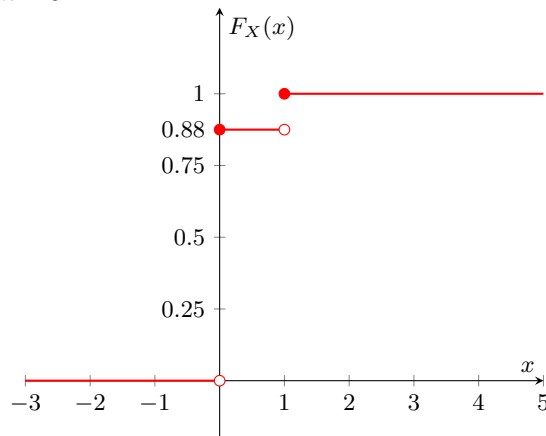
$n = 1$ :



$n = 2$ :



$n = 3$ :



**Aufgabe 3.3** Let  $(X_i)_{i \geq 1} : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$  be random variables. Show that

$$\sigma(X_i : i \geq 1) = \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_1, \dots, X_k)\right).$$

Recall from [Notes 4 \(page 4\)](#) that  $\sigma(X_i : i \geq 1)$  is the smallest  $\sigma$ -field on  $\Omega$  for which all the  $X_i$ 's are measurable and  $\sigma(X_1, \dots, X_k)$  is the smallest  $\sigma$ -field on  $\Omega$  for which  $X_1, \dots, X_k$  are measurable.

**Lösung 3.3** We argue by double inclusion.

“ $\subset$ ”: We first show that

$$\sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_1, \dots, X_k)\right) \subset \sigma(X_i : i \geq 1).$$

To this end, for fixed  $k \geq 1$ , we clearly have  $\sigma(X_1, \dots, X_k) \subset \sigma(X_i : i \geq 1)$ . Hence

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_1, \dots, X_k) \subset \sigma(X_i : i \geq 1)$$

which implies

$$\sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_1, \dots, X_k)\right) \subset \sigma(X_i : i \geq 1).$$

“ $\supset$ ”: Second, we show that

$$\sigma(X_i : i \geq 1) \subset \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_1, \dots, X_k)\right).$$

To this end, we show that for every fixed  $i \geq 1$ ,  $X_i$  is measurable when  $\Omega$  is equipped with the  $\sigma$  field  $\sigma(\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_1, \dots, X_k))$ . To this end, take  $A \in \mathcal{E}$ . Then  $X_i^{-1}(A) \in \sigma(X_i)$  by definition of  $\sigma(X_i)$ . But

$$\sigma(X_i) \subset \sigma(X_1, \dots, X_i) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_1, \dots, X_k) \subset \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_1, \dots, X_k)\right).$$

**Aufgabe 3.4 [ $\sigma$ -Algebren & Zufallsvariablen]**

Bei einem Zufallsexperiment werden ein grüner und ein blauer Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum  $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ . Wir betrachten zwei verschiedene  $\sigma$ -Algebren:

$$\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\mathcal{F}_{sym} := \{A \subseteq \Omega : \forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, (\omega_1, \omega_2) \in A \iff (\omega_2, \omega_1) \in A\}$$

Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  enthält alle Teilmengen von  $\Omega$ . In diesem Fall können wir also jedes Ergebnis des Zufallsexperiments beobachten, z.B. dass der blaue Würfel die Augenzahl 3 zeigt und der grüne Würfel die Augenzahl 5. Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_{sym}$  enthält nur symmetrische Teilmengen von  $\Omega$  (mit Blick auf das Vertauschen der beiden Würfel). In diesem Fall können wir uns vorstellen, dass wir eine Brille tragen, die es uns nicht erlaubt, die Farben der Würfel zu erkennen. Wir können also beispielsweise beobachten, dass ein Würfel die Augenzahl 3 zeigt und der andere die Augenzahl 5, aber nicht dass der Würfel mit der Augenzahl 3 blau ist.

- (a) Zeige, dass  $\mathcal{F}_{sym}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist.  
*Hinweis: Überprüfe hierzu, dass die drei Eigenschaften aus der Definition einer  $\sigma$ -Algebra (siehe Notizen 2 (Seite 1)).*
- (b) Wir betrachten zwei Teilmengen von  $\Omega$ :

$$A := \text{''Ein Würfel zeigt die Augenzahl 3''},$$

$$B := \text{''Der blaue Würfel zeigt die Augenzahl 3''}.$$

Zeige, dass  $A \in \mathcal{F}_{sym}$ , aber  $B \notin \mathcal{F}_{sym}$ .

- (c) Wir betrachten die Abbildungen

$$X : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} \quad \text{''Augenzahl des blauen Würfels''}$$

$$S : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{cases} \quad \text{''Augensumme der beiden Würfel''}$$

Zeige, dass  $X$  keine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$  ist.  
Zeige, dass  $S$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$  ist.

**Lösung 3.4**

- (a) Wir überprüfen die drei Eigenschaften aus der Definition einer  $\sigma$ -Algebra aus Notizen 2 (Seite 1).

- Nachdem für alle  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$  auch  $(\omega_2, \omega_1) \in \Omega$  gilt, folgt direkt, dass  $\Omega \in \mathcal{F}_{sym}$ .
- Sei nun  $A \in \mathcal{F}_{sym}$ . Somit gilt für jedes  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$

$$(\omega_1, \omega_2) \in A \iff (\omega_2, \omega_1) \in A,$$

was äquivalent ist zu

$$(\omega_1, \omega_2) \in A^c \iff (\omega_2, \omega_1) \in A^c.$$

Hieraus folgt  $A^c \in \mathcal{F}_{sym}$ .

- Seien  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_{sym}$ . Für jedes  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$  gilt

$$(\omega_1, \omega_2) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \iff \exists i : (\omega_1, \omega_2) \in A_i \stackrel{A_i \in \mathcal{F}_{sym}}{\iff} \exists i : (\omega_2, \omega_1) \in A_i \iff (\omega_2, \omega_1) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

und somit folgt, dass  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_{sym}$ .

- (b) Im Folgenden steht  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$  für das Ergebnis, dass der grüne Würfel die Augenzahl  $\omega_1$  zeigt und der blaue Würfel die Augenzahl  $\omega_2$ . Somit ist

$$A = \{(3, i) : i \in \{1, \dots, 6\}\} \cup \{(i, 3) : i \in \{1, \dots, 6\}\}$$

und es gilt  $(\omega_1, \omega_2) \in A \iff (\omega_2, \omega_1) \in A$  für jedes  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ , also  $A \in \mathcal{F}_{sym}$ . Weiterhin ist

$$B = \{(i, 3) : i \in \{1, \dots, 6\}\}$$

und wir stellen fest, dass  $(1, 3) \in B$ , aber  $(3, 1) \notin B$ . Somit gilt  $B \notin \mathcal{F}_{sym}$ .

- (c) X: Wir überprüfen die Definition einer Zufallsvariable (siehe Def. in [Notizen 4 \(Seite 5\)](#)) und sehen, dass

$$\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : X((\omega_1, \omega_2)) \leq 1\} = \{(i, 1) : i \in \{1, \dots, 6\}\} \notin \mathcal{F}_{sym},$$

wobei wir analog zu (b) festgestellt haben, dass die Menge nicht in  $\mathcal{F}_{sym}$  ist, da sie das Ergebnis  $(2, 1)$  enthält, aber nicht das Ergebnis  $(1, 2)$ . Somit ist  $X$  keine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$ .

*Bemerkung: X ist natürlich eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Sprachlich würde man typischerweise nicht explizit betonen, dass X keine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$  ist. Stattdessen würde man üblicherweise sagen, dass X eine Zufallsvariable (auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ ) ist, die nicht  $\mathcal{F}_{sym}$  messbar ist.*

- S: Wir überprüfen wieder die Definition einer Zufallsvariable (siehe Def. in [Notizen 4 \(Seite 5\)](#)) und sehen, dass für  $a \in \mathbb{R}$

$$\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : S((\omega_1, \omega_2)) \leq a\} = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \omega_1 + \omega_2 \leq a\} \in \mathcal{F}_{sym},$$

wobei wir genutzt haben, dass  $\omega_1 + \omega_2 \leq a \iff \omega_2 + \omega_1 \leq a$ . Somit ist  $S$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$ .

**Aufgabe 3.5 [Verteilungsfunktion: Würfelwurf]**

Bei einem Zufallsexperiment werden ein grüner und ein blauer Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum  $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ , die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  und das Wahrscheinlichkeitsmass  $P$  definiert durch

$$P((\omega_1, \omega_2)) = 1/36, \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega.$$

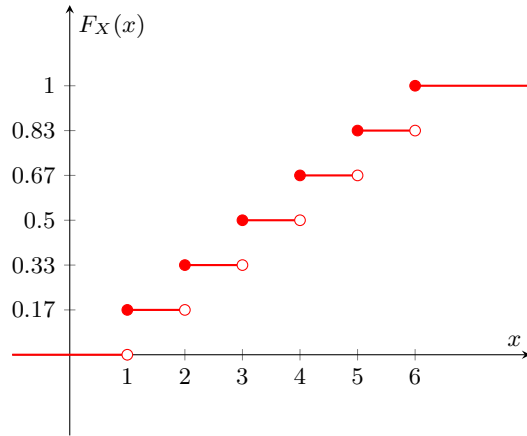
Als Zufallsvariablen betrachten wir

$$\begin{aligned} X &: \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} && \text{”Augenzahl des blauen Würfels”} \\ X^2 &: \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto (\omega_1)^2 \end{cases} && \text{”Das Quadrat der Augenzahl des blauen Würfels”} \\ S &: \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{cases} && \text{”Augensumme der beiden Würfel”} \end{aligned}$$

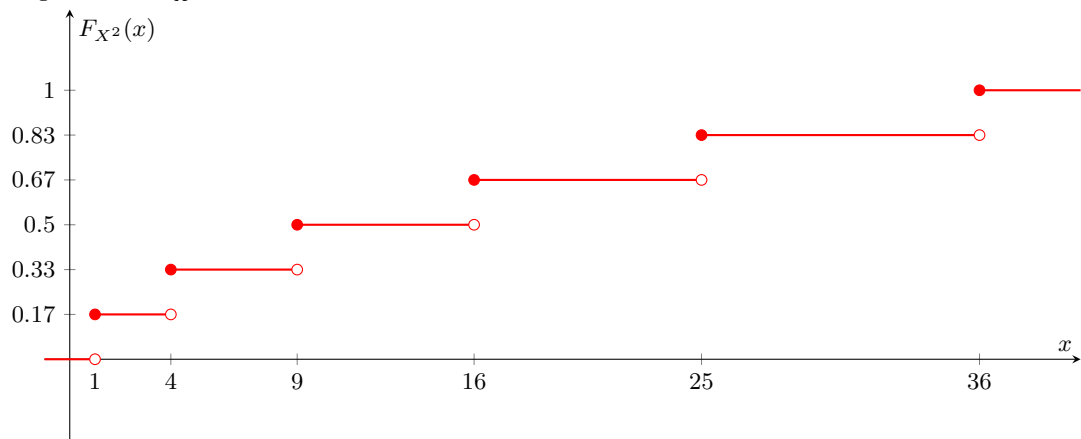
- (a) Zeichne die Verteilungsfunktion von  $X$ .  
 (b) Zeichne die Verteilungsfunktion von  $X^2$ .  
 (c) Zeichne die Verteilungsfunktion von  $S$ .

**Lösung 3.5** *Vorbemerkung: Anders als in Aufgabe [Aufgabe 3.4\(c\)](#) betrachten wir nun die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Insbesondere sind  $X$ ,  $X^2$  und  $S$  Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ .*

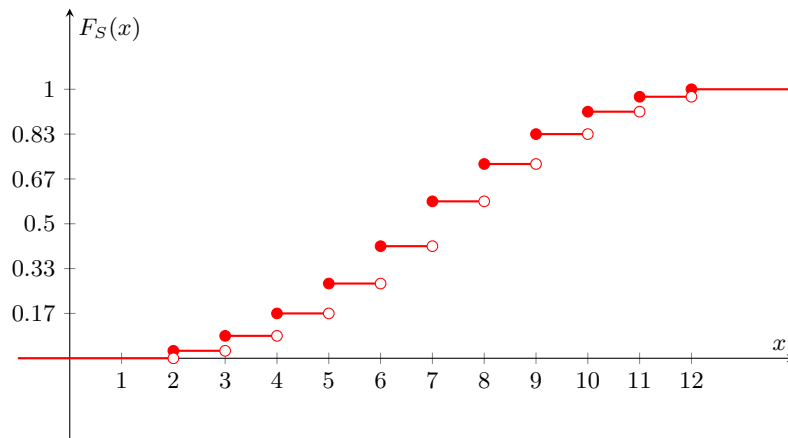
- (a) Wir stellen zuerst fest, dass  $P(X \leq i) = i/6$  für  $i \in \{1, \dots, 6\}$ . Wir erhalten die folgende Verteilungsfunktion  $F_X$ :



(b) Wir stellen zuerst fest, dass  $P(X \leq i^2) = i/6$  für  $i \in \{1, \dots, 6\}$ . Wir erhalten die folgende Verteilungsfunktion  $F_{X^2}$ :



(c) Wir stellen zuerst fest, dass  $P(S = 2) = P(S = 12) = 1/36$ ,  $P(S = 3) = P(S = 11) = 2/36$ ,  $P(S = 4) = P(S = 10) = 3/36$ ,  $P(S = 5) = P(S = 9) = 4/36$ ,  $P(S = 6) = P(S = 8) = 5/36$  und  $P(S = 7) = 6/36$ . Wir erhalten die folgende Verteilungsfunktion  $F_S$ :



Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das [Forum](#) (oder eine Mail an [Jakob Heiss](#)).