

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 4

Version 3 (16. Mai 2024: Tippfehler in [Aufgabe 4.2](#) ausgebessert, da in Würfeln nur 6 Seiten hat und keine Seite mit 0 Augen hat.); Lösung Version 2 (4. April: In [Aufgabe 4.1](#) verwenden wir jetzt auch die Notation $\{X = k\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}$. In [Aufgabe 4.1](#) wird der Fall $n = 2$ explizit ausgeschrieben. Tippfehler wurden ausgebessert.); Lösung Version 1 (28. März: basierend auf Serie Version 2 (22. März: Hinweis zu [Aufgabe 4.1](#) entfernt und winzige Verbesserungen an der Formatierung.); Version 1 (21. März))

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im [Forum](#).

Bitte stell sicher, dass du die Webseite <https://kahoot.it/> in der Übung am **26. März** öffnen kannst. Freiwillige [Abgabe](#) bis **28. März 8:00**. Nachher kann selbstständig mit dieser Lösung verglichen werden.

Aufgabe 4.1 Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf $\Omega = \{0, 1\}^n$ mit $P(\cdot) = \frac{|\cdot|}{2^n}$. Wir definieren n Zufallsvariablen $Z_i(\omega) := \omega_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Somit sind diese Zufallsvariablen u.i.v. (im englischen i.i.d.) und erfüllen $P(Z_i = 1) = P(Z_i = 0) = \frac{1}{2}$.¹

(a) Wir definieren eine weitere Zufallsvariable

$$X := \sum_{i=1}^n Z_i.$$

- (i) Berechne $P(X = k)$ für $k \in \mathbb{N}$.
- (ii) Wie lautet μ_X ?
- (iii) Im Fall $n = 2$ berechne F_X und zeichne F_X .
Hinweis: Die Definitionen sind in [Notizen 4 \(Seite 10\)](#) und [Notizen 4 \(Seite 11\)](#).

(b) Wir definieren eine weitere Zufallsvariable

$$Y := \prod_{i=1}^n Z_i.$$

- (i) Berechne $P(Y = k)$ für $k \in \{0, 1\}$.
- (ii) Wie lautet μ_Y ?
- (iii) Berechne F_Y und zeichne F_Y .

Lösung 4.1

(a) (i) Für $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}) \\ &= P\left(\left\{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^n Z_i(\omega) = k\right\}\right) \\ &= P\left(\left\{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^n \omega_i = k\right\}\right) \\ &= \frac{|\{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^n \omega_i = k\}|}{2^n} \\ &= \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

¹Bemerke, dass [Aufgabe 4.1](#) vollständig gelöst werden könnte ohne jemals einen konkreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ zu definieren. Die einzige Information die wir über die Zufallsvariablen $(Z_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ für diese Aufgabe benötigen, ist dass sie u.i.v. sind und $P(Z_i = 1) = P(Z_i = 0) = \frac{1}{2}$ erfüllen. Mit diesen Zufallsvariablen Z_i könnte man beispielsweise n unabhängige Münzwürfe modellieren.

Für $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, \dots, n\}$: $P(X = k) = 0$.

Bemerkung: Im Fall $n = 2$ ist X aus dieser Aufgabe gleich X aus [Aufgabe 3.1](#).

(ii)

$$\mu_X = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \delta_k.$$

(iii)

$$F_X(a) = P(X \leq a) = \mu_X((-\infty, a]) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor a \rfloor} \frac{\binom{n}{k}}{2^n}, & \text{wenn } 0 \leq a \leq n \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $n = 2$ (siehe [Abbildung 4](#) oder [Lösung der Aufgabe 3.1](#)) erhalten wir

$$F_X(a) = P(X \leq a) = \mu_X((-\infty, a]) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{wenn } 0 \leq a < 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{wenn } 1 \leq a < 2 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In den [Abbildungen 1 bis 4](#) zeichnen wir die Verteilungsfunktion F_X für verschiedene Werte n .

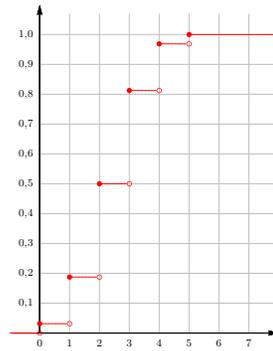


Abbildung 1: F_X für $n = 5$.

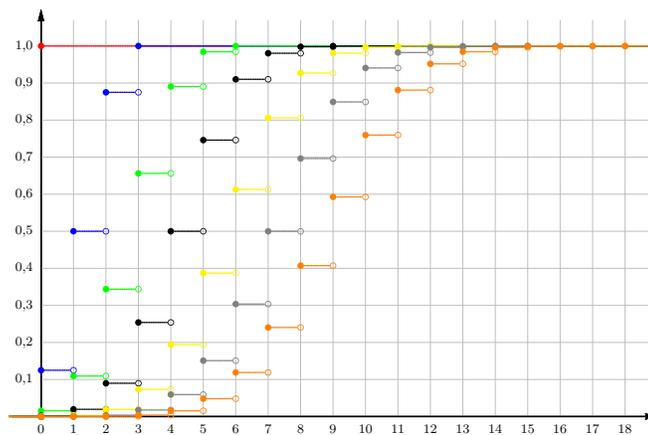


Abbildung 2: F_X für $n = 0$, $n = 3$, $n = 6$, $n = 6$, $n = 9$, $n = 12$, $n = 15$.

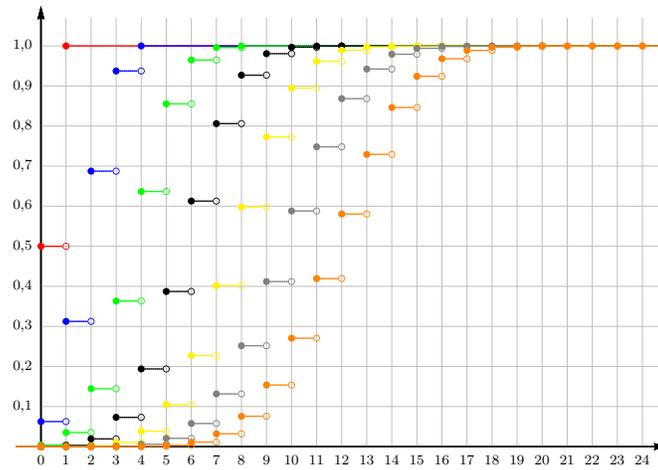


Abbildung 3: F_X für $n = 1, n = 4, n = 8, n = 12, n = 16, n = 20, n = 24$.

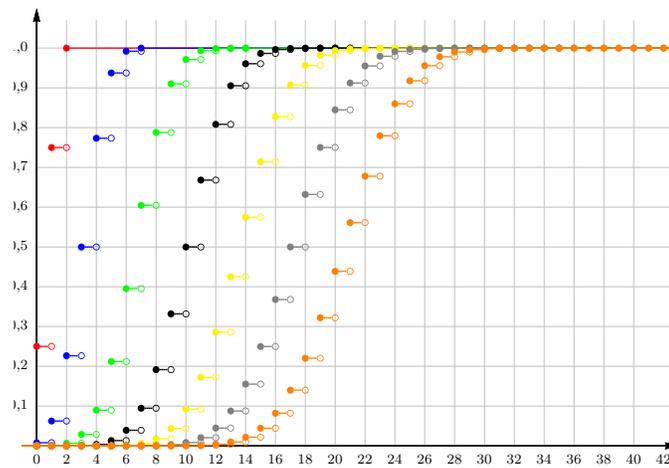


Abbildung 4: F_X für $n = 2, n = 7, n = 14, n = 21, n = 28, n = 35, n = 42$.

(b) (i)

$$\begin{aligned}
P(Y = 1) &= P\left(\prod_{i=1}^n Z_i = 1\right) \\
&= P(\forall i \in \{1, \dots, n\} : Z_i = 1) \\
&= P\left(\bigcap_{i=1}^n \underbrace{\{Z_i = 1\}}_{\{\omega \in \Omega : Z_i(\omega) = 1\}}\right) \\
&= \prod_{i=1}^n P\left(\underbrace{\{Z_i = 1\}}_{\{\omega \in \Omega : Z_i(\omega) = 1\}}\right) \\
&= \prod_{i=1}^n P(Z_i = 1) \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir $P(Y = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, weil $Y(\Omega) = \{0, 1\}$.

Alternative Lösung: Man kann auch überprüfen, dass Y aus dieser Aufgabe

$$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto Y(\omega) := \prod_{i=1}^n Z_i(\omega) = \prod_{i=1}^n \omega_i.$$

gleich Y aus [Aufgabe 3.2](#) ist und somit alle Resultate aus der [Lösung der Aufgabe 3.2](#) übernehmen.

(ii) Daraus können wir schliessen, dass

$$\mu_Y = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \delta_0 + \frac{1}{2^n} \delta_1.$$

gilt.

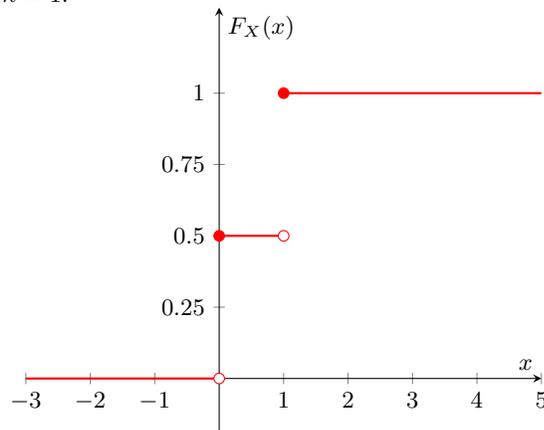
(iii) Somit können wir direkt ablesen, dass

$$F_Y(a) = P(Y \leq a) = \mu_Y((-\infty, a]) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ 1 - \frac{1}{2^n}, & \text{wenn } 0 \leq a < 1 \\ 1, & \text{wenn } 1 \leq a \end{cases}$$

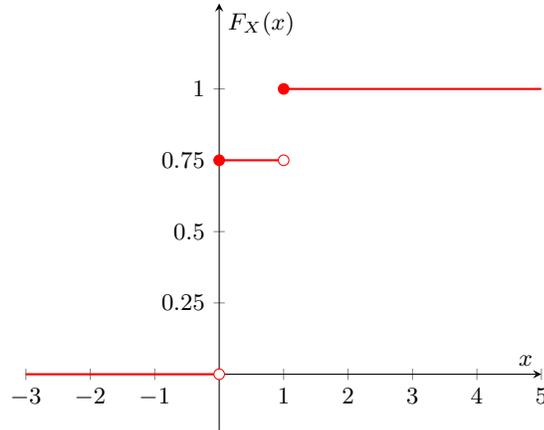
gilt (siehe die Definition in [Notizen 4 \(Seite 11\)](#)).

Intuitives Beispiel: $F_Y(1.25) = \mu_Y((-\infty, 1.25)) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} = 1$, weil $\delta_0((-\infty, 1.25)) = 1$ (weil $0 \in (-\infty, 1.25)$) und $\delta_1((-\infty, 1.25)) = 1$ (weil $1 \in (-\infty, 1.25)$).

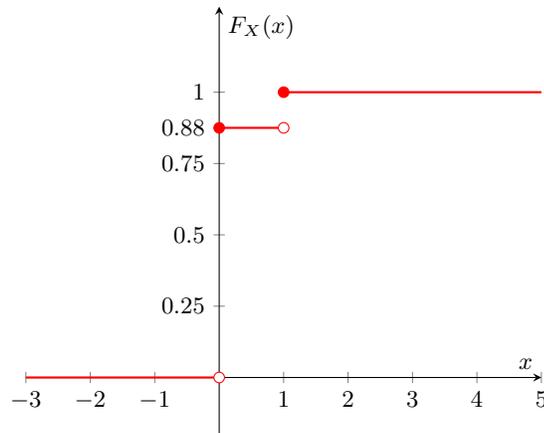
$n = 1$:



$n = 2$:



$n = 3$:



Aufgabe 4.2 Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$ mit $P(\cdot) = \frac{|\cdot|}{6^n}$. Wir definieren n Zufallsvariablen $X_i(\omega) := \omega_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. (Das wäre zum Beispiel ein sinnvolles Modell für n unabhängige Würfelwürfe.) Wir definieren

$$Z = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i$$

als die höchste gewürfelte Augenzahl unter den n geworfenen Würfeln.²
 Berechne die Verteilungsfunktion F_Z von Z .

Lösung 4.2 Offensichtlich sind $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ u.i.v. (English: i.i.d.).

$$\begin{aligned} F_Z(a) &= P(Z \leq a) \\ &= P\left(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i \leq a\right) \\ &= P(\forall i \in \{1, \dots, n\} : X_i \leq a) \\ &= \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} P(X_i \leq a) \\ &= \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} F_{X_i}(a) = (F_{X_1}(a))^n. \end{aligned}$$

²Wenn wir Operationen die auf \mathbb{R} definiert sind auf reellwertige Funktionen anwenden, ist das punktweise zu verstehen, also $\forall \omega \in \Omega : Z(\omega) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i(\omega)$.

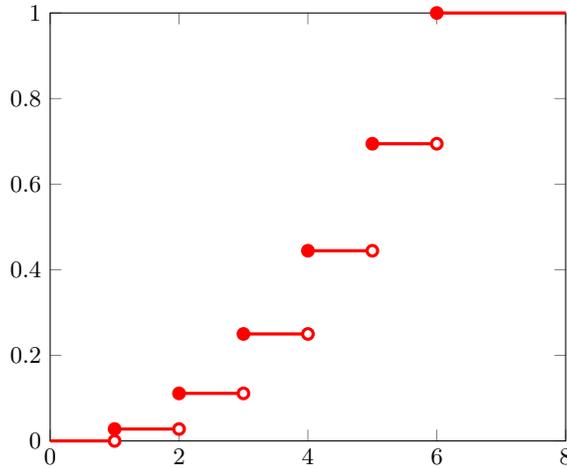
Für jedes X_i gilt,

$$F_{X_i}(a) = P(X_i \leq a) = \mu_{X_i}((-\infty, a]) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor a \rfloor} \frac{1}{6}, & \text{wenn } 0 \leq a \leq 6 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ \frac{\lfloor a \rfloor}{6}, & \text{wenn } 0 \leq a \leq 6 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn wir diese beiden Ergebnisse kombinieren erhalten wir schlussendlich:

$$F_Z(a) = (F_{X_1}(a))^n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ \left(\frac{\lfloor a \rfloor}{6}\right)^n, & \text{wenn } 0 \leq a \leq 6 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

F_Z für $n = 2$:



Aufgabe 4.3 [Verteilungsfuntion: (Un-)Stetigkeitsstellen]

Sei X eine Zufallsvariable auf (Ω, \mathcal{F}, P) . Gemäss Theorem aus [Notizen 4 \(Seite 13\)](#) (Theorem 2.4 im [Skript](#)) ist die Verteilungsfunktion von X an jeder Stelle rechtsseitig stetig. In dieser Aufgabe beantworten wir die Frage, an welchen Stellen F_X auch linksseitig stetig (und somit stetig) ist. Zur Erinnerung: F_X ist linksseitig stetig an der Stelle $a \in \mathbb{R}$, falls

$$F_X(a-) := \lim_{h \downarrow 0} F_X(a - h) = F_X(a).$$

(a) Zeige, dass

$$P(X = a) = F_X(a) - F_X(a-) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Nutze die Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses aus Proposition 1.11 im [Skript](#).

(b) Schlussfolgere, dass F_X an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig ist genau dann, wenn $P(X = a) = 0$ gilt.

Lösung 4.3

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $(h_n)_{n \geq 1}$ eine monoton fallende Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ und $h_n > 0$ für alle $n \geq 1$. Die Folge von Ereignissen $(A_n)_{n \geq 1}$ mit

$$A_n := \{X \leq a - h_n\}$$

ist monoton fallend und somit folgt aus der Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses (siehe Proposition 1.11), dass

$$\lim_{h \downarrow 0} F_X(a - h) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(a - h_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(X < a),$$

da $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq a - h_n\} = \{X < a\}$. Es folgt also, dass

$$F_X(a) - F_X(a-) = F_X(a) - \lim_{h \downarrow 0} F_X(a - h) = P(X \leq a) - P(X < a) = P(X = a).$$

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$.

Falls F_X an der Stelle a stetig ist, so ist F_X an dieser Stelle insbesondere linksseitig stetig und somit gilt per Definition $F_X(a-) = F_X(a)$. Aus Teilaufgabe (a) folgt, dass $P(X = a) = 0$.

Falls $P(X = a) = 0$ gilt, so folgt aus Teilaufgabe (a), dass $F_X(a-) = F_X(a)$ und somit ist F_X an der Stelle a linksseitig stetig. Da F_X als Verteilungsfunktion immer auch rechtsseitig stetig ist (siehe Theorem 2.4), folgt die Stetigkeit von F_X an der Stelle a .

Aufgabe 4.4 Let (X_n) be a sequence of independent random variables that are all uniformly distributed on $[0, 1]$. Show that

$$\text{almost surely, } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} \ln \left(\frac{1}{X_n} \right) = 1$$

Hint: Use the Borel-Cantelli lemmas.

Lösung 4.4 For $c > 0$ we let $A_c^n = \{\log(1/X_n)/\log n \geq c\} = \{X_n \leq 1/n^c\}$. Then

$$P(A_c^n) = P(X_n \leq 1/n^c) = \frac{1}{n^c}.$$

Thus, for $c > 1$ we have $\sum_{n \geq 1} P(A_c^n) < \infty$. Hence $\limsup_{n \rightarrow \infty} \log(1/X_n)/\log n \leq c$ almost surely by the first Borel-Cantelli lemma. On the other hand, for $c \in (0, 1]$ we have $\sum_{n \geq 1} P(A_c^n) = \infty$. Hence $\limsup_{n \rightarrow \infty} \log(1/X_n)/\log n \geq c$ almost surely by the independence of the (X_n) and the second Borel-Cantelli lemma. The claim in the question now follows since

$$\begin{aligned} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \log(1/X_n)/\log n = 1 \right\} &= \bigcap_{k \geq 1} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \log(1/X_n)/\log n \leq 1 + 1/k \right\} \\ &\quad \cap \bigcap_{k > 1} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{X_n} \right) / \log n \geq 1 - 1/k \right\} \end{aligned}$$

and the countable intersection of events of probability 1 again has probability 1. □

Die folgenden beiden Aufgaben verwenden Inhalte von der Vorlesung vom Dienstag, 26. März. Darum empfehlen wir diese erst nach Dienstag zu lösen:

Aufgabe 4.5 [Konstruktion von Zufallsvariablen]

Definition 4.1 (Bernoulli-Zufallsvariable). Wenn wir schreiben, dass eine Zufallsvariable X $\text{Ber}(p)$ -verteilt ist, dann bedeutet das, dass $P(X = 1) = p$ und $P(X = 0) = 1 - p$. Eine Kurzschreibweise ist $X \sim \text{Ber}(p)$.

Ziel dieser Aufgabe ist es, Zufallsvariablen aus einer Folge unabhängiger Münzwürfe zu konstruieren. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i \geq 1}$ eine unendliche Folge von unabhängigen, $\text{Ber}(1/2)$ -verteilten Zufallsvariablen. Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

```

i = 1
While   $X_i = X_{i+1} = 1$   do
     $i = i + 2$ 
endwhile
 $Z = X_i + 2 \cdot X_{i+1}$ 
Return   $Z$ 
    
```

(a) Zeige, dass der Algorithmus immer (mit Wahrscheinlichkeit 1) nach endlich vielen Schritten terminiert.

(b) Zeige, dass Z eine gleichverteilte Zufallsvariable in $\{0, 1, 2\}$ ist.

- (c) Gebe einen Algorithmus an, der eine $\text{Ber}(1/5)$ -verteilte Zufallsvariable ausgibt.
 (d) [Bonus] Gebe einen Algorithmus an, der eine $\text{Ber}(1/\pi)$ -verteilte Zufallsvariable Z ausgibt.

Lösung 4.5

- (a) Um zu zeigen, dass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten terminiert, müssen wir zeigen, dass die While-Schleife nur endlich oft durchlaufen wird. Wir stellen fest, dass für $j \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} A_j &:= \{\text{While-Schleife wird genau } j \text{ Mal durchlaufen}\} \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{2j} \{X_i = 1\} \right) \cap (\{X_{2j+1} = 0\} \cup \{X_{2j+2} = 0\}). \end{aligned}$$

Aus der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $(X_i)_{i \geq 1}$ folgt

$$\begin{aligned} P[A_j] &= P \left[\bigcap_{i=1}^{2j} \{X_i = 1\} \cap (\{X_{2j+1} = 0\} \cup \{X_{2j+2} = 0\}) \right] \\ &= \left(\prod_{i=1}^{2j} P[X_i = 1] \right) \cdot \underbrace{P[\{X_{2j+1} = 0\} \cup \{X_{2j+2} = 0\}]}_{=1 - P(\{X_{2j+1}=1\} \cap \{X_{2j+2}=1\}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2j}. \end{aligned}$$

Wir summieren nun über alle Szenarien, in denen der Algorithmus terminiert, d.h. über die disjunkten Ereignisse $(A_j)_{j \geq 1}$ und erhalten

$$\begin{aligned} P(\text{Algorithmus terminiert}) &= \sum_{j=0}^{\infty} P[A_j] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2j} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^j = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 1. \end{aligned}$$

- (b) Aus Teilaufgabe (a) wissen wir, dass das Ereignis $A := \{\text{Algorithmus terminiert}\} = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$ Wahrscheinlichkeit 1 hat und dass die Ereignisse $(A_j)_{j \geq 1}$ disjunkt sind. Somit gilt

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &= P(\{Z = 0\} \cap A) + \underbrace{P(\{Z = 0\} \cap A^c)}_{\leq P(A^c) = 0} = \sum_{j=0}^{\infty} P(\{Z = 0\} \cap A_j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P \left[\bigcap_{i=1}^{2j} \{X_i = 1\} \cap \{X_{2j+1} = 0\} \cap \{X_{2j+2} = 0\} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2j+2} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^j = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $(X_i)_{i \geq 1}$ verwendet haben sowie die Definition von Z im Algorithmus. Analog erhält man auch, dass

$$P(Z = 1) = P(Z = 2) = \frac{1}{3}$$

und somit ist die Zufallsvariable Z gleichverteilt in $\{0, 1, 2\}$.

(c) Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

```

i = 1
While (Xi = Xi+2 = 1) or (Xi+1 = Xi+2 = 1) do
    i = i + 3
endwhile
Z = Xi + 2 · Xi+1 + 4 · Xi+2
If Z = 4
    Z' := 1
Else
    Z' := 0
Return Z'

```

Wie in Aufgabenteil (a) kann man zeigen, dass der Algorithmus mit Wahrscheinlichkeit 1 terminiert und analog zu Aufgabenteil (b) kann man sehen, dass die Zufallsvariable Z gleichverteilt ist in $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Somit folgt, dass Z' Ber(1/5)-verteilt ist.

(d) Zur Konstruktion einer Ber(1/π)-verteilten Zufallsvariable verwenden wir die Idee aus der Vorlesung, dass man mithilfe von Ber(1/2)-verteilten Zufallsvariablen eine zufällige Zahl im Intervall $[0, 1]$ konstruieren kann. Anders als in der Vorlesung, wo wir zur Konstruktion einer gleichverteilten Zufallsvariable unendlich viele Münzwürfe benötigen haben, werden wir sehen, dass hier endlich viele Münzwürfe ausreichen.

Schritt 1: Wir schreiben

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i},$$

d.h. $0.y_1y_2y_3\dots$ ist die Darstellung der Zahl $1/\pi$ im Binärsystem. Um zu wissen, ob eine Zahl $x \in [0, 1]$ grösser oder kleiner als $1/\pi$ ist, genügt es, die Binärdarstellung von x bis zu der Stelle zu kennen, wo diese zum ersten Mal von der Binärdarstellung von $1/\pi$ abweicht.

Schritt 2: Wir betrachten die Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ nun als die Nachkommastellen einer zufälligen Zahl X im Binärsystem und wollen herausfinden, ob $X \leq 1/\pi$ oder $X > 1/\pi$ gilt. Hierzu betrachten wir den folgenden Algorithmus:

```

i = 1
While Xi = yi do
    i = i + 1
endwhile
Z = 1 - Xi
Return Z

```

Der Algorithmus vergleicht mithilfe der While-Schleife die Binärdarstellung der zufälligen Zahl X mit der Binärdarstellung von $1/\pi$. Sobald diese zum ersten Mal voneinander abweichen, also $X_i \neq y_i$, folgt $X < 1/\pi$, falls $X_i = 0 < 1 = y_i$, oder $X > 1/\pi$, falls $X_i = 1 > 0 = y_i$. Für $X \in [0, 1/\pi)$, setzen $Z = 1$, andernfalls $Z = 0$. Da X gleichverteilt in $[0, 1]$ ist, folgt, dass Z Ber(1/π)-verteilt ist. Abschliessend bemerken wir, dass sich analog zu Aufgabenteil (a) zeigen lässt, dass der Algorithmus mit Wahrscheinlichkeit 1 terminiert.

Aufgabe 4.6 [Transformation von Zufallsvariablen]

Ziel dieser Aufgabe ist es, Zufallsvariablen durch Transformation einer gleichverteilten Zufallsvariable zu konstruieren. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und U eine gleichverteilte Zufallsvariable in $[0, 1]$, d.h. $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

- Konstruiere aus U eine Ber(1/3)-verteilte Zufallsvariable Z .
- Konstruiere aus U eine gleichverteilte Zufallsvariable U' in $[-1, 2]$. Was ist die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $(U')^2$?

- (c) Konstruiere aus U eine $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilte Zufallsvariable Y .
Hinweis: Eine Zufallsvariable heisst exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ (kurz $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt), falls folgende die Verteilungsfunktion hat:

$$F(a) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda a}, & \text{für } a \geq 0, \\ 0, & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Lösung 4.6

Idee: Wir wollen Theorem 2.14 aus dem [Skript](#) (bzw. [Notizen 5 \(Seite 4\)](#)) anwenden. Hierzu müssen wir lediglich die verallgemeinerte Inverse der jeweiligen Verteilungsfunktion bestimmen.

- (a) Die Verteilungsfunktion einer $\text{Ber}(1/3)$ -verteilten Zufallsvariable ist

$$F(a) = \begin{cases} 0, & \text{für } a < 0, \\ 2/3, & \text{für } 0 \leq a < 1, \\ 1, & \text{für } a \geq 1. \end{cases}$$

Die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ist also gegeben durch

$$F^{-1}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 < \alpha \leq 2/3, \\ 1, & \text{für } 2/3 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Aus Theorem 2.14 aus dem [Skript](#) folgt, dass $Z := F^{-1}(U)$ $\text{Ber}(1/3)$ -verteilt ist.

- (b) Die Verteilungsfunktion einer $\mathcal{U}([-1, 2])$ -verteilten Zufallsvariable ist

$$F(a) = \begin{cases} 0, & \text{für } a < -1, \\ \frac{a+1}{3}, & \text{für } -1 \leq a \leq 2, \\ 1, & \text{für } a \geq 2. \end{cases}$$

Die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ist also gegeben durch

$$F^{-1}(\alpha) = 3\alpha - 1$$

Aus Theorem 2.14 aus dem [Skript](#) folgt, dass $U' := F^{-1}(U)$ $\mathcal{U}([-1, 2])$ -verteilt ist. Um die Verteilungsfunktion von $(U')^2$ zu bestimmen, stellen wir zunächst fest, dass

$$F_{(U')^2}(a) = \mathbb{P}((U')^2 \leq a) = \begin{cases} 0, & \text{für } a < 0, \\ \mathbb{P}(-\sqrt{a} \leq U' \leq \sqrt{a}) = \mathbb{P}(U' \leq \sqrt{a}) - \mathbb{P}(U' < -\sqrt{a}), & \text{für } a \geq 0. \end{cases}$$

Es gilt

$$\mathbb{P}(U' \leq \sqrt{a}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a}+1}{3}, & \text{für } 0 \leq a \leq 4, \\ 1, & \text{für } a > 4, \end{cases}$$

und

$$\mathbb{P}(U' \leq -\sqrt{a}) = \begin{cases} \frac{-\sqrt{a}+1}{3}, & \text{für } 0 \leq a \leq 1, \\ 0, & \text{für } a > 1. \end{cases}$$

Somit erhalten wir

$$F_{(U')^2}(a) = \mathbb{P}((U')^2 \leq a) = \begin{cases} 0, & \text{für } a < 0, \\ \frac{2\sqrt{a}}{3}, & \text{für } 0 \leq a \leq 1, \\ \frac{\sqrt{a}+1}{3}, & \text{für } 1 < a \leq 4, \\ 1, & \text{für } a > 4. \end{cases}$$

- (c) Die Verteilungsfunktion einer $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariable ist

$$F(a) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda a}, & \text{für } a \geq 0, \\ 0, & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ist also gegeben durch

$$F^{-1}(\alpha) = -\frac{\log(1 - \alpha)}{\lambda}.$$

Aus Theorem 2.14 aus dem [Skript](#) folgt, dass $Y := F^{-1}(U)$ Exp(λ)-verteilt ist.

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das [Forum](#) (oder eine Mail an [Jakob Heiss](#)).