Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 4

Lösung Version 2 (4. April 2024: In Aufgabe 4.1 verwenden wir jetzt auch die Notation $\{ X = k \} := \{ \omega \in \Omega : X(\omega) = k \}$. In Aufgabe 4.1 wird der Fall $n = 2$ explizit ausgeschrieben. Tippfehler wurden ausgebessert.) Lösung Version 1 (28. März: basierend auf Serie Version 2 (22. März: Hinweis zu Aufgabe 4.1 entfernt und winzige Verbesserungen an der Formatierung.), Version 1 (21. März))
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **26. März** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **28. März 8:00**. Nachher kann selbstständig mit dieser Lösung verglichen werden.

Aufgabe 4.1 Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf $\Omega = \{0,1\}^n$ mit $\mathrm{P}(\cdot) = \frac{|\cdot|}{2^n}$. Wir definieren n Zufallsvariablen $Z_i(\omega) := \omega_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Somit sind diese Zufallsvariablen u.i.v. (im englischen i.i.d.) und erfüllen $\mathrm{P}(Z_i = 1) = \mathrm{P}(Z_i = 0) = \frac{1}{2}$.[1]

(a) Wir definieren eine weitere Zufallsvariable

$$X := \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

(i) Berechne $\mathrm{P}(X = k)$ für $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Wie lautet μ_X?

(iii) Im Fall $n = 2$ berechne F_X und zeichne F_X.
Hinweis: Die Definitionen sind in Notizen 4 (Seite 10) und Notizen 4 (Seite 11).

(b) Wir definieren eine weitere Zufallsvariable

$$Y := \prod_{i=1}^{n} Z_i.$$

(i) Berechne $\mathrm{P}(Y = k)$ für $k \in \{0, 1\}$.

(ii) Wie lautet μ_Y?

(iii) Berechne F_Y und zeichne F_Y.

Lösung 4.1

(a) (i) Für $k \in \{0, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = k) &= \mathrm{P}(\{ \omega \in \Omega : X(\omega) = k \}) \\
&= \mathrm{P}\left(\left\{ \omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{n} Z_i(\omega) = k \right\}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\left\{ \omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k \right\}\right) \\
&= \frac{\left|\{ \omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k \}\right|}{2^n} \\
&= \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

[1] Bemerke, dass Aufgabe 4.1 vollständig gelöst werden könnte ohne jemals einen konkreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ zu definieren. Die einzige Information die wir über die Zufallsvariablen $(Z_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ für diese Aufgabe benötigen, ist dass sie u.i.v. sind und $\mathrm{P}(Z_i = 1) = \mathrm{P}(Z_i = 0) = \frac{1}{2}$ erfüllen. Mit diesen Zufallsvariablen Z_i könnte man beispielsweise n unabhängige Münzwürfe modellieren.

Für $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, \dots, n\}$: $\mathrm{P}(X = k) = 0$.

Bemerkung: Im Fall $n = 2$ ist X aus dieser Aufgabe gleich X aus Aufgabe 3.1.

(ii)

$$\mu_X = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \delta_k.$$

(iii)

$$F_X(a) = \mathrm{P}(X \leq a) = \mu_X((-\infty, a]) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor a \rfloor} \frac{\binom{n}{k}}{2^n}, & \text{wenn } 0 \leq a \leq n \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $n = 2$ (siehe Abbildung 4 oder Lösung der Aufgabe 3.1) erhalten wir

$$F_X(a) = \mathrm{P}(X \leq a) = \mu_X((-\infty, a]) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{wenn } 0 \leq a < 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{wenn } 1 \leq a < 2 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In den Abbildungen 1 bis 4 zeichnen wir die Verteilungsfunktion F_X für verschiedene Werte n.

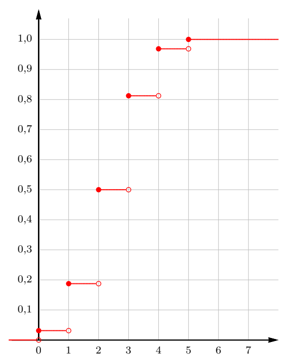


Abbildung 1: F_X für $n = 5$.

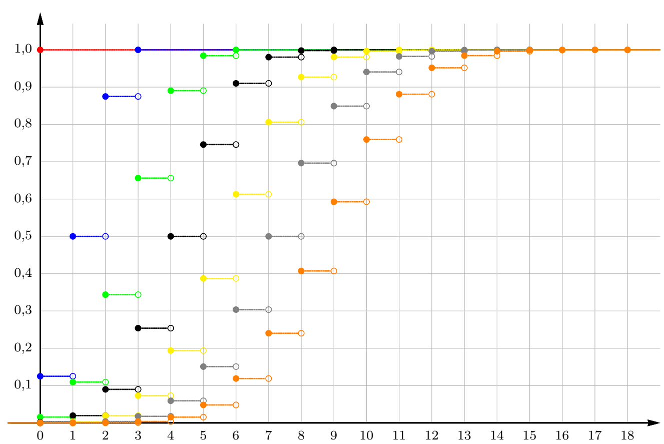


Abbildung 2: F_X für $n = 0$, $n = 3$, $n = 6$, $n = 6$, $n = 9$, $n = 12$, $n = 15$.

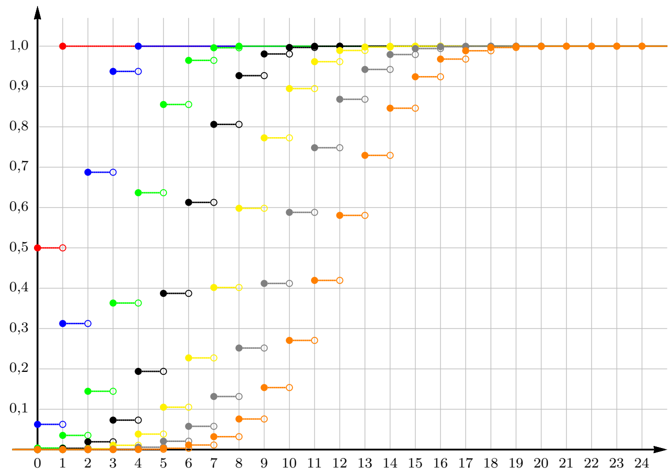


Abbildung 3: F_X für $n = 1$, $n = 4$, $n = 8$, $n = 12$, $n = 16$, $n = 20$, $n = 24$.

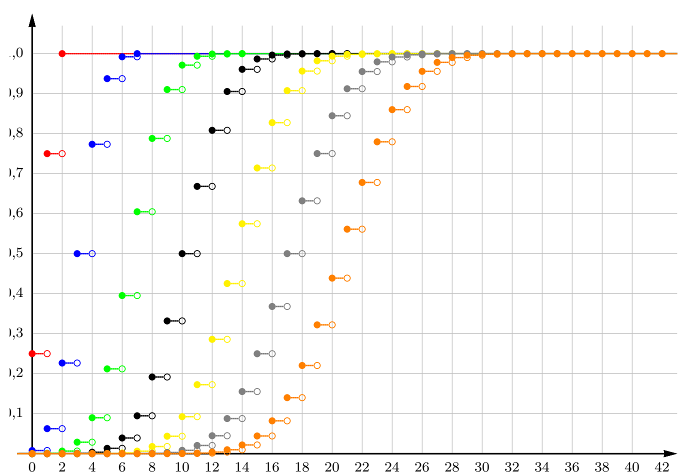


Abbildung 4: F_X für $n = 2$, $n = 7$, $n = 14$, $n = 21$, $n = 28$, $n = 35$, $n = 42$.

(b) (i)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=1) &= \mathrm{P}\left(\prod_{i=1}^{n} Z_i = 1\right) \\
&= \mathrm{P}(\forall i \in \{1,\dots,n\} : Z_i = 1) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{\{ Z_i = 1 \}}_{\{ \omega\in\Omega : Z_i(\omega)=1 \}}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(\underbrace{\{ Z_i = 1 \}}_{\{ \omega\in\Omega : Z_i(\omega)=1 \}}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(Z_i = 1) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir $\mathrm{P}(Y=0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, weil $Y(\Omega) = \{ 0, 1 \}$.

Alternative Lösung: Man kann auch überprüfen, dass Y aus dieser Aufgabe

$$\begin{aligned}
Y &: \Omega \to \mathbb{R} \\
\omega &\mapsto Y(\omega) := \prod_{i=1}^{n} Z_i(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \omega_i.
\end{aligned}$$

gleich Y aus Aufgabe 3.2 ist und somit alle Resultate aus der Lösung der Aufgabe 3.2 übernehmen.

(ii) Daraus können wir schliessen, dass

$$\mu_Y = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\delta_0 + \frac{1}{2^n}\delta_1.$$

gilt.

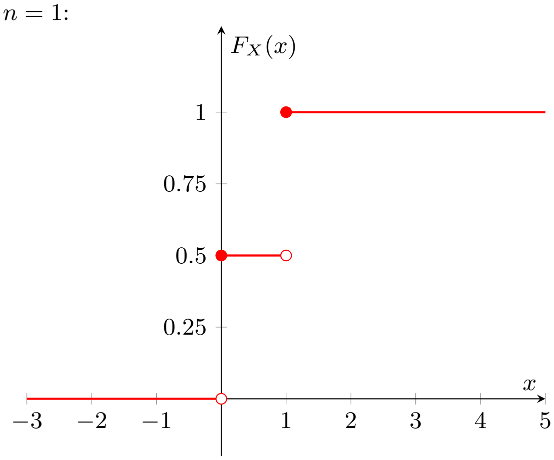
(iii) Somit können wir direkt ablesen, dass

$$F_Y(a) = \mathrm{P}(Y \le a) = \mu_Y((-\infty, a]) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ 1 - \frac{1}{2^n}, & \text{wenn } 0 \le a < 1 \\ 1, & \text{wenn } 1 \le a \end{cases}$$

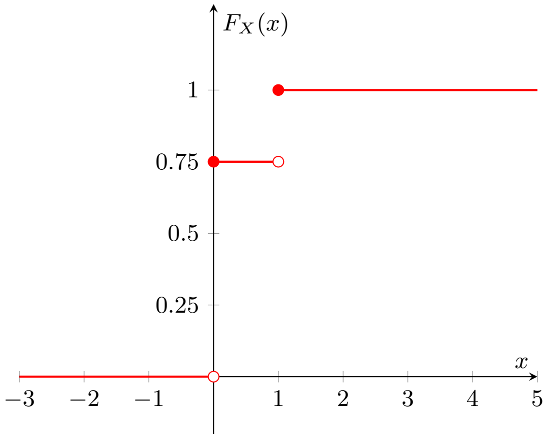
gilt (siehe die Definition in Notizen 4 (Seite 11)).

Intuitives Beispiel: $F_Y(1.25) = \mu_Y((-\infty, 1.25)) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} = 1$, weil $\delta_0((-\infty, 1.25)) = 1$ (weil $0 \in (-\infty, 1.25)$) und $\delta_1((-\infty, 1.25)) = 1$ (weil $1 \in (-\infty, 1.25)$).

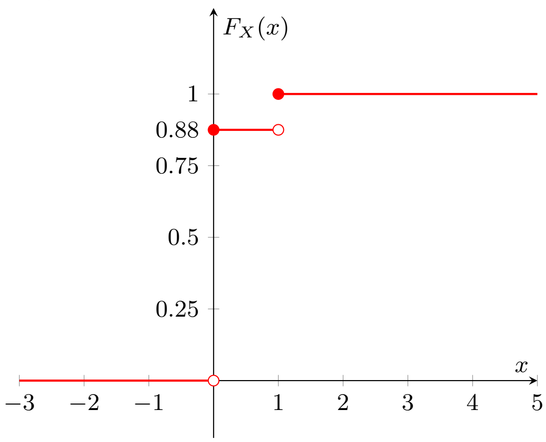
$n = 1$:



$n = 2$:



$n = 3$:



Aufgabe 4.2 Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$ mit $\mathrm{P}(\cdot) = \frac{|\cdot|}{6^n}$. Wir definieren n Zufallsvariablen $X_i(\omega) := \omega_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. (Das wäre zum Beispiel ein sinnvolles Modell für n unabhängige Würfelwürfe.) Wir definieren

$$Z = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} X_i$$

als die höchste gewürfelte Augenzahl unter den n geworfenen Würfeln.[2]

Berechne die Verteilungsfunktion F_Z von Z.

Lösung 4.2 Offensichtlich sind $(X_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ u.i.v. (English: i.i.d.).

$$\begin{aligned}
F_Z(a) &= \mathrm{P}(Z \leq a) \\
&= \mathrm{P}\left(\max_{i \in \{1,\dots,n\}} X_i \leq a\right) \\
&= \mathrm{P}(\forall i \in \{1, \dots, n\} : X_i \leq a) \\
&= \prod_{i \in \{1,\dots,n\}} \mathrm{P}(X_i \leq a) \\
&= \prod_{i \in \{1,\dots,n\}} F_{X_i}(a) = (F_{X_1}(a))^n .
\end{aligned}$$

[2]Wenn wir Operationen die auf $\mathbb{R}$ definiert sind auf reellwertige Funktionen anwenden, ist das punktweise zu verstehen, also $\forall \omega \in \Omega : Z(\omega) = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} X_i(\omega)$.

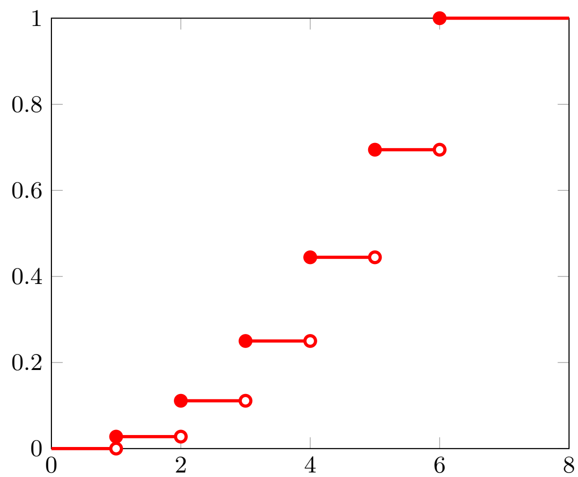
Für jedes X_i gilt,

$$F_{X_i}(a) = \mathrm{P}\left(X_i \leq a\right) = \mu_{X_i}((-\infty, a]) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor a \rfloor} \frac{1}{6}, & \text{wenn } 0 \leq a \leq 6 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ \frac{\lfloor a \rfloor}{6}, & \text{wenn } 0 \leq a \leq 6 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn wir diese beiden Ergebnisse kombinieren erhalten wir schlussendlich:

$$F_Z(a) = (F_{X_1}(a))^n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a < 0 \\ \left(\frac{\lfloor a \rfloor}{6}\right)^n, & \text{wenn } 0 \leq a \leq 6 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

F_Z für $n = 2$:



Aufgabe 4.3 [Verteilungsfuntion: (Un-)Stetigkeitsstellen]
Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Gemäss Theorem aus Notizen 4 (Seite 13) (Theorem 2.4 im Skript) ist die Verteilungsfunktion von X an jeder Stelle rechtsseitig stetig. In dieser Aufgabe beantworten wir die Frage, an welchen Stellen F_X auch linksseitig stetig (und somit stetig) ist. Zur Erinnerung: F_X ist *linksseitig stetig* an der Stelle $a \in \mathbb{R}$, falls

$$F_X(a-) := \lim_{h \downarrow 0} F_X(a - h) = F_X(a).$$

(a) Zeige, dass

$$\mathrm{P}\left(X = a\right) = F_X(a) - F_X(a-) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Nutze die Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses aus Proposition 1.11 im Skript.

(b) Schlussfolgere, dass F_X an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig ist genau dann, wenn $\mathrm{P}\left(X = a\right) = 0$ gilt.

Lösung 4.3

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $(h_n)_{n \geq 1}$ eine monoton fallende Folge mit $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ und $h_n > 0$ für alle $n \geq 1$. Die Folge von Ereignissen $(A_n)_{n\geq 1}$ mit

$$A_n := \{X \leq a - h_n\}$$

ist monoton fallend und somit folgt aus der Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses (siehe Proposition 1.11), dass

$$\lim_{h\downarrow 0} F_X(a-h) = \lim_{n\to\infty} F_X(a - h_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(A_n\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathrm{P}\left(X < a\right),$$

da $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{X \leq a - h_n\} = \{X < a\}$. Es folgt also, dass

$$F_X(a) - F_X(a-) = F_X(a) - \lim_{h\downarrow 0} F_X(a-h) = \mathrm{P}\left(X \leq a\right) - \mathrm{P}\left(X < a\right) = \mathrm{P}\left(X = a\right).$$

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$.

Falls F_X an der Stelle a stetig ist, so ist F_X an dieser Stelle insbesondere linksseitig stetig und somit gilt per Definition $F_X(a-) = F_X(a)$. Aus Teilaufgabe (a) folgt, dass $\mathrm{P}(X = a) = 0$.

Falls $\mathrm{P}(X = a) = 0$ gilt, so folgt aus Teilaufgabe (a), dass $F_X(a-) = F_X(a)$ und somit ist F_X an der Stelle a linksseitig stetig. Da F_X als Verteilungsfunktion immer auch rechtsseitig stetig ist (siehe Theorem 2.4), folgt die Stetigkeit von F_X an der Stelle a.

Aufgabe 4.4 Let (X_n) be a sequence of independent random variables that are all uniformly distributed on $[0, 1]$. Show that

$$\text{almost surely,} \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \ln\left(\frac{1}{X_n}\right) = 1$$

Hint: Use the Borel-Cantelli lemmas.

Lösung 4.4 For $c > 0$ we let $A_c^n = \{\log(1/X_n)/\log n \geq c\} = \{X_n \leq 1/n^c\}$. Then

$$\mathrm{P}(A_c^n) = \mathrm{P}(X_n \leq 1/n^c) = \frac{1}{n^c}.$$

Thus, for $c > 1$ we have $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(A_c^n) < \infty$. Hence $\limsup_{n\to\infty} \log(1/X_n)/\log n \leq c$ almost surely by the first Borel-Cantelli lemma. On the other hand, for $c \in (0, 1]$ we have $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(A_c^n) = \infty$. Hence $\limsup_{n\to\infty} \log(1/X_n)/\log n \geq c$ almost surely by the independence of the (X_n) and the second Borel-Cantelli lemma. The claim in the question now follows since

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} \log(1/X_n)/\log n = 1\right\} = \bigcap_{k\geq 1}\left\{\limsup_{n\to\infty} \log(1/X_n)/\log n \leq 1 + 1/k\right\}$$
$$\cap \bigcap_{k>1}\left\{\limsup_{n\to\infty} \ln(\frac{1}{X_n}/\log n \geq 1 - 1/k\right\}$$

and the countable intersection of events of probability 1 again has probability 1. □

Die folgenden beiden Aufgaben verwenden Inhalte von der Vorlesung vom Dienstag, 26. März. Darum empfehlen wir diese erst nach Dienstag zu lösen:

Aufgabe 4.5 [Konstruktion von Zufallsvariablen]

Definition 4.1 (Bernoulli-Zufallsvariable)**.** Wenn wir schreiben, dass eine Zufallvariable X Ber(p)-verteilt ist, dann bedeutet das, dass $\mathrm{P}(X = 1) = p$ und $\mathrm{P}(X = 0) = 1 - p$. Eine Kurzschreibweise ist $X \sim \mathrm{Ber}(p)$.

Ziel dieser Aufgabe ist es, Zufallsvariablen aus einer Folge unabhängiger Münzwürfe zu konstruieren. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\geq 1}$ eine unendliche Folge von unabhängigen, Ber(1/2)-verteilten Zufallsvariablen. Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

$i = 1$
While $X_i = X_{i+1} = 1$ **do**
  $i = i + 2$
endwhile
$Z = X_i + 2 \cdot X_{i+1}$
Return Z

(a) Zeige, dass der Algorithmus immer (mit Wahrscheinlichkeit 1) nach endlich vielen Schritten terminiert.

(b) Zeige, dass Z eine gleichverteilte Zufallsvariable in $\{0, 1, 2\}$ ist.

(c) Gebe einen Algorithmus an, der eine Ber(1/5)-verteilte Zufallsvariable ausgibt.

(d) *[Bonus]* Gebe einen Algorithmus an, der eine Ber($1/\pi$)-verteilte Zufallsvariable Z ausgibt.

Lösung 4.5

(a) Um zu zeigen, dass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten terminiert, müssen wir zeigen, dass die While Schlaufe nur endlich oft durchlaufen wird. Wir stellen fest, dass für $j \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} A_j :=& \{\text{While-Schlaufe wird genau } j \text{ Mal durchlaufen}\} \\ =& \left(\bigcap_{i=1}^{2j} \{X_i = 1\}\right) \cap \big(\{X_{2j+1} = 0\} \cup \{X_{2j+2} = 0\}\big). \end{aligned}$$

Aus der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $(X_i)_{i\geq 1}$ folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[A_j] &= \mathrm{P}\left[\bigcap_{i=1}^{2j} \{X_i = 1\} \cap \big(\{X_{2j+1} = 0\} \cup \{X_{2j+2} = 0\}\big)\right] \\ &= \left(\prod_{i=1}^{2j} \mathrm{P}[X_i = 1]\right) \cdot \underbrace{\mathrm{P}[\{X_{2j+1} = 0\} \cup \{X_{2j+2} = 0\}]}_{=1-\mathrm{P}\left(\{X_{2j+1}=1\}\cap\{X_{2j+2}=1\}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j}. \end{aligned}$$

Wir summieren nun über alle Szenarien, in denen der Algorithmus terminiert, d.h. über die disjunkten Ereignisse $(A_j)_{j\geq 1}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\text{Algorithmus terminiert}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}[A_j] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{j} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1. \end{aligned}$$

(b) Aus Teilaufgabe (a) wissen wir, dass das Ereignis $A := \{\text{Algorithmus terminiert}\} = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$ Wahrscheinlichkeit 1 hat und dass die Ereignisse $(A_j)_{j\geq 1}$ disjunkt sind. Somit gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z = 0) &= \mathrm{P}(\{Z = 0\} \cap A) + \underbrace{\mathrm{P}\left(\{Z = 0\} \cap A^{\complement}\right)}_{\leq \mathrm{P}\left(A^{\complement}\right)=0} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(\{Z = 0\} \cap A_j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}\left[\bigcap_{i=1}^{2j} \{X_i = 1\} \cap \{X_{2j+1} = 0\} \cap \{X_{2j+2} = 0\}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j+2} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{j} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $(X_i)_{i\geq 1}$ verwendet haben sowie die Definition von Z im Algorithmus. Analog erhält man auch, dass

$$\mathrm{P}(Z = 1) = \mathrm{P}(Z = 2) = \frac{1}{3}$$

und somit ist die Zufallsvariable Z gleichverteilt in $\{0, 1, 2\}$.

(c) Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

$i = 1$
While $(X_i = X_{i+2} = 1)$ or $(X_{i+1} = X_{i+2} = 1)$ **do**
  $i = i + 3$
endwhile
$Z = X_i + 2 \cdot X_{i+1} + 4 \cdot X_{i+2}$
If $Z = 4$
  $Z' := 1$
Else
  $Z' := 0$
Return Z'

Wie in Aufgabenteil (a) kann man zeigen, dass der Algorithmus mit Wahrscheinlicheit 1 terminiert und analog zu Aufgabenteil (b) kann man sehen, dass die Zufallsvariable Z gleichverteilt ist in $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Somit folgt, dass Z' Ber(1/5)-verteilt ist.

(d) Zur Konstruktion einer Ber($1/\pi$)-verteilten Zufallsvariable verwenden wir die Idee aus der Vorlesung, dass man mithilfe von Ber(1/2)-verteilten Zufallsvariablen eine zufällige Zahl im Intervall $[0, 1]$ konstruieren kann. Anders als in der Vorlesung, wo wir zur Konstruktion einer gleichverteilten Zufallsvariable unendlich viele Münzwürfe benötigt haben, werden wir sehen, dass hier endlich viele Münzwürfe ausreichen.

Schritt 1: Wir schreiben

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i},$$

d.h. $0.y_1y_2y_3\ldots$ ist die Darstellung der Zahl $1/\pi$ im Binärsystem. Um zu wissen, ob eine Zahl $x \in [0, 1]$ grösser oder kleiner als $1/\pi$ ist, genügt es, die Binärdarstellung von x bis zu der Stelle zu kennen, wo diese zum ersten Mal von der Binärdarstellung von $1/\pi$ abweicht.

Schritt 2: Wir betrachten die Folge $(X_i)_{i\geq 1}$ nun als die Nachkommastellen einer zufälligen Zahl X im Binärsystem und wollen herausfinden, ob $X \leq 1/\pi$ oder $X > 1/\pi$ gilt. Hierzu betrachten wir den folgenden Algorithmus:

$i = 1$
While $X_i = y_i$ **do**
  $i = i + 1$
endwhile
$Z = 1 - X_i$
Return Z

Der Algorithmus vergleicht mithilfe der While-Schlaufe die Binärdarstellung der zufälligen Zahl X mit der Binärdarstellung von $1/\pi$. Sobald diese zum ersten Mal voneinander abweichen, also $X_i \neq y_i$, folgt $X < 1/\pi$, falls $X_i = 0 < 1 = y_i$, oder $X > 1/\pi$, falls $X_i = 1 > 0 = y_i$. Für $X \in [0, 1/\pi)$, setzen $Z = 1$, andernfalls $Z = 0$. Da X gleichverteilt in $[0, 1]$ ist, folgt, dass Z Ber($1/\pi$)-verteilt ist. Abschliessend bemerken wir, dass sich analog zu Aufgabenteil (a) zeigen lässt, dass der Algorithmus mit Wahrscheinlichkeit 1 terminiert.

Aufgabe 4.6 [Transformation von Zufallsvariablen]
Ziel dieser Aufgabe ist es, Zufallsvariablen durch Transformation einer gleichverteilten Zufallsvariable zu konstruieren. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und U eine gleichverteilte Zufallsvariable in $[0, 1]$, d.h. $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

(a) Konstruiere aus U eine Ber(1/3)-verteilte Zufallsvariable Z.

(b) Konstruiere aus U eine gleichverteilte Zufallsvariable U' in $[-1, 2]$. Was ist die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $(U')^2$?

(c) Konstruiere aus U eine Exp(λ)-verteilte Zufallsvariable Y.
Hinweis: Eine Zufallsvariable heisst exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ (kurz Exp(λ)-verteilt), falls folgende die Verteilungsfunktion hat:

$$F(a) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda a}, & \text{für } a \geq 0, \\ 0, & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Lösung 4.6
Idee: Wir wollen Theorem 2.14 aus dem Skript (bzw. Notizen 5 (Seite 4)) anwenden. Hierzu müssen wir lediglich die verallgemeinerte Inverse der jeweiligen Verteilungsfunktion bestimmen.

(a) Die Verteilungfunktion einer Ber(1/3)-verteilten Zufallsvariable ist

$$F(a) = \begin{cases} 0, & \text{für } a < 0, \\ 2/3, & \text{für } 0 \leq a < 1, \\ 1, & \text{für } a \geq 1. \end{cases}$$

Die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist also gegeben durch

$$F^{-1}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 < \alpha \leq 2/3, \\ 1, & \text{für } 2/3 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Aus Theorem 2.14 aus dem Skript folgt, dass $Z := F^{-1}(U)$ Ber(1/3)-verteilt ist.

(b) Die Verteilungfunktion einer $\mathcal{U}([-1,2])$-verteilten Zufallsvariable ist

$$F(a) = \begin{cases} 0, & \text{für } a < -1, \\ \frac{a+1}{3}, & \text{für } -1 \leq a \leq 2, \\ 1, & \text{für } a \geq 2. \end{cases}$$

Die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist also gegeben durch

$$F^{-1}(\alpha) = 3\alpha - 1$$

Aus Theorem 2.14 aus dem Skript folgt, dass $U' := F^{-1}(U)$ $\mathcal{U}([-1,2])$-verteilt ist. Um die Verteilungsfunktion von $(U')^2$ zu bestimmen,stellen wir zunächst fest, dass

$$F_{(U')^2}(a) = \mathrm{P}\left((U')^2 \leq a\right) = \begin{cases} 0, & \text{für } a < 0, \\ \mathrm{P}\left(-\sqrt{a} \leq U' \leq \sqrt{a}\right) = \mathrm{P}\left(U' \leq \sqrt{a}\right) - \mathrm{P}\left(U' < -\sqrt{a}\right), & \text{für } a \geq 0. \end{cases}$$

Es gilt

$$\mathrm{P}\left(U' \leq \sqrt{a}\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a}+1}{3}, & \text{für } 0 \leq a \leq 4, \\ 1, & \text{für } a > 4, \end{cases}$$

und

$$\mathrm{P}\left(U' \leq -\sqrt{a}\right) = \begin{cases} \frac{-\sqrt{a}+1}{3}, & \text{für } 0 \leq a \leq 1, \\ 0, & \text{für } a > 1. \end{cases}$$

Somit erhalten wir

$$F_{(U')^2}(a) = \mathrm{P}\left((U')^2 \leq a\right) = \begin{cases} 0, & \text{für } a < 0, \\ \frac{2\sqrt{a}}{3}, & \text{für } 0 \leq a \leq 1, \\ \frac{\sqrt{a}+1}{3}, & \text{für } 1 < a \leq 4, \\ 1, & \text{für } a > 4. \end{cases}$$

(c) Die Verteilungfunktion einer Exp(λ)-verteilten Zufallsvariable ist

$$F(a) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda a}, & \text{für } a \geq 0, \\ 0, & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist also gegeben durch

$$F^{-1}(\alpha) = -\frac{\log(1-\alpha)}{\lambda}.$$

Aus Theorem 2.14 aus dem Skript folgt, dass $Y := F^{-1}(U)$ $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilt ist.

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).