Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 5

Lösung Version 2 (16. April 2024: Details ergänzt und Tippfehler ausgebessert. Z.B.: Mehr Details zum Bewewis in der Lösung von Aufgabe 5.3(a) und falsche Formel für r in der Lösung von Aufgabe 5.3(b) ausgebessert.) Lösung Version 1 (11. April: basierend auf Serie Version 2 (4. April: In Aufgabe 5.3 gilt natürlich "$T_2 \sim \mathrm{Geo}(q)$" und nicht "$T_2 \sim \mathrm{Geo}(g)$". In Aufgabe 5.3(a) muss natürlich "$\forall a \in \mathbb{N} : \mathrm{P}(T > a) = (1-p)^a$" anstatt "$\forall a \in T \in \mathbb{N} : \mathrm{P}(T > a) = (1-p)^a$" stehen.), Version 1 (29. März))
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **09. April** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **11. April 8:00**. Nachher kann selbstständig mit dieser Lösung verglichen werden.

Aufgabe 5.1 [Gemeinsame Verteilung diskreter Zufallsvariablen I]
Wir definieren die Menge $W = \mathbb{N}^2$ Wir definieren die Funktion $p : W \to [0,1]$,

$$p(j,k) = \begin{cases} C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{für } k = 2,3,\dots \text{ und } j = 1,2,\dots,k-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit folgenden Eigenschaften

- $\mathrm{P}((X,Y) \in W) = 1$ und
- $\forall (j,k) \in W : \mathrm{P}(X = j, Y = k) = p(j,k)$.[1]

(a) Bestimme die Konstante C.

(b) Berechne die Gewichtsfunktionen p_X und p_Y der Zufallsvariablen X und Y. Gib auch μ_X und μ_Y an.

(c) Sind X und Y unabhängig?

Bemerkung: Diese Bemerkung ist irrelevant für die Lösung der Aufgabe, aber sie gibt vielleicht eine Motivation und einen Ausblick warum Aufgabe 5.1 später interessant sein könnte. Später wird die Notation der gemeinsamen Gewichtsfunktion eingeführt werden. Dann kann man einfach sagen: "Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamer Gewichtsfunktion:

$$p(j,k) = \mathrm{P}(X = j, Y = k) = \begin{cases} C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{für } k = 2,3,\dots \text{ und } j = 1,2,\dots,k-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

" und meint damit genau, dass X und Y die beiden oben beschriebenen Eigenschaften erfüllt. Aus masstheoretischer Sicht, ist $\tilde{p} : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty), (x,y) \mapsto \tilde{p}(x,y) = \begin{cases} p(x,y) & \text{wenn } (x,y) \in W \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Radon-Nikodým-Dichte von $\mu_{(X,Y)}$ bezüglich dem Zählmass, wobei $\mu_{(X,Y)}(E) = \mathrm{P}((X,Y) \in E)$. Beziehungsweise ist p die Radon-Nikodým-Dichte von $\mu_{(X,Y)}|_W$ bezüglich dem Zählmass auf W. Die Verteilungen der Zufallsvariablen X und Y werden spẗer als Randverteilungen bezeichnet werden.

Lösung 5.1

(a) Da $\mathrm{P}((X,Y) \in W) = 1$ ist, muss gelten

$$1 \stackrel{!}{=} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{P}(X = j, Y = k) = C \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = C \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$= C \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}}{1-\frac{1}{2}} = C \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = C \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = C.$$

Also ist $C = 1$.

[1] Die erste Eigenschaft kann auch äquivalent als $\mathrm{P}(\{\,\omega \in \Omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in W\,\}) = 1$ gelesen werden oder äquivalent kann man auch sagen $(X,Y) \in W$ P-f.s.. Die zweite Eigenschaft kann auch äquivalent als $\forall (j,k) \in W : \mathrm{P}(\{\,\omega \in \Omega : X(\omega) = j \text{ und } Y(\omega) = k\,\}) = p(j,k)$ gelesen werden.

(b) Wir berechnen für $j \geq 1$,

$$p_X(j) = \mathrm{P}(X = j) = \mathrm{P}(X = j, (X,Y) \in W) = \mathrm{P}\Bigg(\bigsqcup_{\substack{(x,y)\in W\\ x=j}} \underbrace{\{X = x, Y = y\}}_{\{\omega\in\Omega : X(\omega)=x, Y(\omega)=y\}}\Bigg)$$
$$= \sum_{\substack{(x,y)\in W\\ x=j}} \mathrm{P}(X = x, Y = y) = \sum_{k\in\{y\in\mathbb{R}:(j,y)\in W\}} p(j,k)$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} p(j,k) = \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

und für $k \geq 2$

$$p_Y(k) = \mathrm{P}(Y = k) = \sum_{j=1}^{k-1} p(j,k) = (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

und $p_Y(k) = 0$ für $k \leq 1$.
Somit gilt

$$\mu_X = \sum_{j=1}^{\infty} p_X(j)\delta_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j \delta_j,$$
$$\mu_Y = \sum_{k=2}^{\infty} p_Y(k)\delta_k = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \delta_k.$$

Alternative Darstellung: $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$:

$$\mu_X(B) = \sum_{j\in B\cap\mathbb{N}} p_X(j) = \sum_{j\in B\cap\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^j,$$
$$\mu_Y(B) = \sum_{j\in B\cap\mathbb{N}} p_Y(k) = \sum_{j\in B\cap\mathbb{N}} (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

(c) Offensichtlich sind die Mengen $\{1\}$ und $\{2\}$ abgeschlossen und somit in $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ aber es gilt

$$p(1,2) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = p_X(1) \cdot p_Y(2),$$

und daher sind X und Y nicht unabhängig.
Bemerkung: Die diskreten Zufallsvariablen X und Y wären genau dann unabhängig, wenn für alle $k \geq 2$ und für alle $j \geq 1$ gilt

$$p(j,k) = p_X(j) \cdot p_Y(k).$$

Aufgabe 5.2 [Gemeinsame Verteilung diskreter Zufallsvariablen II: Konstruktion]
Seien W_1 und W_2 endlich oder abzählbar und sei $p : W_1 \times W_2 \to [0,1]$ eine Funktion mit

$$\sum_{x_1\in W_1, x_2\in W_2} p(x_1,x_2) = 1.$$

Seien weiterhin U_1 und U_2 zwei unabhängige $\mathcal{U}([0,1])$-verteilter Zufallsvariablen. Ziel dieser Aufgabe ist es, mithilfe von U_1 und U_2 zwei diskrete Zufallsvariablen X_1 und X_2 zu konstruieren, sodass (X_1, X_2) die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $\mathrm{P}((X_1, X_2) \in W) = 1$, wobei $W := W_1 \times W_2$, und
- $\forall (x_1, x_2) \in W : \mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = p(x_1, x_2)$.

(a) Was ist die Gewichtsfunktion p_{X_1} der Zufallsvaraible X_1? Nutze U_1, um die Zufallsvariable X_1 zu konstruieren.
Erinnerung: In Aufgabe 4.6 haben wir bereits einige Zufallsvariablen aus einer $\mathcal{U}([0,1])$-verteilter Zufallsvariable konstruiert.

(b) Analog zu Aufgabenteil (a) könnte man nun auch U_2 nutzen, um die Zufallsvariable X_2 mit Gewichtsfunktion p_{X_2} zu konstruieren. Zeige, dass (X_1, X_2) in diesem Fall

$$\forall (x_1, x_2) \in W : \mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = q(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$$

erfüllen würde.

Die Konstruktion aus Aufgabenteil (b) funktioniert also nur, falls $p(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ für alle $x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$ gilt, also wenn die Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig sind. Aber nicht jede Funktion p kann so dargestellt werden. Im Fall von abhängigen Zufallsvaraiblen X_1 und X_2 gilt $p \neq q$.

(c) *[schwer]* Nutze U_2, um die Zufallsvariable X_2 so zu konstruieren, dass (X_1, X_2) beide oben genannten Eigenschaften erfüllt (insbesondere in Fällen wo $p \neq q$, soll $\forall (x_1, x_2) \in W : \mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = p(x_1, x_2)$ gelten).

Lösung 5.2

(a) Analog zu Aufgabe 5.1(b) berechnen wir

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2 \in W_2} p(x_1, x_2).$$

Bemerkung: Diese Formel ist sehr wichtig und wird später noch etwas allgemeiner bewiesen in Satz 5.4 im Skript.
Nach Annahme gilt weiterhin $\sum_{x_1 \in W_1} p_{X_1}(x_1) = 1$. Da W_1 endlich oder abzählbar ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $W_1 = \{w_1, w_2, \ldots\}$. Wir partitionieren das Intervall $(0, 1]$ in Teilintervalle $(q_{j-1}, q_j]$ der Länge $p_{X_1}(j)$ auf. Wir definieren hierfür

$$q_0 := 0 \quad \text{und für } j \geq 1, \quad q_j := \sum_{i=1}^{j} p_{X_1}(w_i)$$

und

$$X_1(\omega) := \sum_{j \geq 1} w_j \; \mathbb{1}_{U_1(\omega) \in (q_{j-1}, q_j]},$$

sodass das j-te Teilintervall auf w_j abgebildet wird. Um zu überprüfen, dass X_1 die gewünschte Gewichtsfunktion/Verteilung hat, berechnen wir

$$\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \sum_{j \geq 1} \underbrace{\mathrm{P}\left[U_1(\omega) \in (q_{j-1}, q_j]\right]}_{= q_j - q_{j-1} = p_{X_1}(w_j)} \mathbb{1}_{x_1 = w_j} = p_{X_1}(x_1),$$

was zu zeigen war.
Alternativ könnten wir auch erst F_{X_1} berechnen und dann erhalten, dass $F_{X_1}^{-1}(u) = \sum_{j \geq 1} w_j \; \mathbb{1}_{u \in (q_{j-1}, q_j]}$ gilt und somit exakt die gleiche Zufallsvaraible X_1 erhalten. Natürlich gebe es auch unendlich viele andere Möglichkeiten X_1 über U_1 darzustellen (zum Beispiel $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U + r \mod 1)$ für beliebiges $r \in [0, 1)$).

(b) Wir konstruieren zunächst X_2 aus U_2 analog zu Aufgabenteil (a). Für die Gewichtsfunktion der Randverteilung von X_2 muss gelten, dass für $x_2 \in W_2$,

$$p_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1 \in W_1} p(x_1, x_2).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $W_2 = \{w'_1, w'_2, \ldots\}$. Wir definieren

$$q'_0 := 0 \quad \text{und für } j \geq 1, \quad q'_j := \sum_{i=1}^{j} p_{X_2}(w'_i)$$

und

$$X_2(\omega) := \sum_{j\geq 1} w'_j \, \mathbb{1}_{U_2(\omega)\in(q'_{j-1},q'_j]}.$$

X_2 hat die gewünschte Gewichtsfunktion/Verteilung, da

$$\mathrm{P}\left(X_2 = x_2\right) = \sum_{j\geq 1} \underbrace{\mathrm{P}\big[U_2(\omega) \in (q'_{j-1}, q'_j]\big]}_{=q'_j - q'_{j-1} = p_{X_2}(w'_j)} \mathbb{1}_{x_2 = w'_j} = p_{X_2}(x_2).$$

Da die Zufallsvariablen U_1 und U_2 unabhängig sind, folgt dass die Zufallsvariablen $X_1(= \phi_1(U_1))$ und $X_2(= \phi_2(U_2))$ unabhängig sind (siehe Korollar in Notizen 4 (Seite 25)). Dies ist gemäss Satz in Notizen 6 (Seite 5) (oder Satz 5.6 im Skript) äquivalent zu der Aussage, dass für die gemeinsame Gewichtsfunktion/Verteilung gilt

$$q(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2), \quad \forall x_1 \in W_1,\ x_2 \in W_2.$$

(c) Sei X_1 konstruiert wie in Aufgabenteil (a) beschrieben. Insbesondere gilt also für alle $x_1 \in W_1$,

$$\mathrm{P}\left(X_1 = x_1\right) = p_{X_1}(x_1)$$

und X_1 ist unabhängig von U_2.

Für die Konstruktion von X_2 nutzen wir die folgende Idee: Wir konstruieren zuerst X_1. Abhängig von dem Wert von X_1, sagen wir $X_1 = x_1$, konstruieren wir X_2 dann mithilfe der 'bedingten' Gewichtsfunktion/Verteilung von X_2, also $\frac{p(x_1,\cdot)}{p_{X_1}(x_1)}$.

Wie zuvor nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $W_2 = \{w'_1, w'_2, \ldots\}$ und definieren für jedes $x_1 \in W_1$,

$$q_0^{(x_1)} := 0 \quad \text{und für } j \geq 1, \quad q_j^{(x_1)} := \sum_{i=1}^{j} \frac{p(x_1, w'_i)}{p_{X_1}(x_1)}.$$

Basierend auf U_2 und X_1 definieren wir X_2 nun wie folgt

$$X_2(\omega) := \sum_{x_1\in W_1} \mathbb{1}_{X_1(\omega)=x_1} \sum_{j\geq 1} w'_j \, \mathbb{1}_{U_2(\omega)\in\left(q_{j-1}^{(x_1)}, q_j^{(x_1)}\right]}.$$

Wir zeigen nun, dass (X_1, X_2) die gewünschte gemeinsame Gewichtsfunktion/Verteilung hat: Für alle $x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2\right) &= \mathrm{P}\left(\sum_{\tilde{x}_1\in W_1} \mathbb{1}_{X_1=\tilde{x}_1} \sum_{j\geq 1} w'_j \, \mathbb{1}_{U_2\in\left(q_{j-1}^{(\tilde{x}_1)}, q_j^{(\tilde{x}_1)}\right]} = x_2,\ X_1 = x_1\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\sum_{j\geq 1} w'_j \, \mathbb{1}_{U_2\in\left(q_{j-1}^{(x_1)}, q_j^{(x_1)}\right]} = x_2,\ X_1 = x_1\right) \\
&\overset{[X_1, U_2 \text{unabhängig}]}{=} \mathrm{P}\left(\sum_{j\geq 1} w'_j \, \mathbb{1}_{U_2\in\left(q_{j-1}^{(x_1)}, q_j^{(x_1)}\right]} = x_2\right) \cdot \mathrm{P}\left(X_1 = x_1\right) \\
&= \left(\sum_{j\geq 1} \underbrace{\mathrm{P}\left(q_{j-1}^{(x_1)} < U_2 \leq q_j^{(x_1)}\right)}_{=q_j^{(x_1)} - q_{j-1}^{(x_1)} = \frac{p(x_1, w'_j)}{p_{X_1}(x_1)}} \mathbb{1}_{w'_j = x_2}\right) \cdot p_{X_1}(x_1) \\
&= \frac{p(x_1, x_2)}{p_{X_1}(x_1)} \cdot p_{X_1}(x_1) = p(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.3 Seien $T_1 \sim \text{Geo}(p)$ und $T_2 \sim \text{Geo}(q)$ zwei unabhängige geometrisch verteilte Zufallsvaraiblen mit $p, q \in (0,1]$ (siehe Def. in Notizen 6 (Seite 8)).

(a) Zeige, dass

$$T \sim \text{Geo}(p) \iff \Big(\mathrm{P}\left(T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right) = 1 \text{ und } \forall a \in \mathbb{N} : \mathrm{P}\left(T > a\right) = (1-p)^a\Big)$$

gilt.

(b) Zeige, dass

$$\min(T_1, T_2) \sim \text{Geo}(r)$$

gilt und gebe eine Formel für r an.

(c) Zeige (im Fall $p = q$)[2], dass das Maximum zweiter unabhängiger geometrisch verteilter Zufallsvariablen nicht geometrisch verteilt ist, i.e.,

$$\nexists r \in (0,1] : \max(T_1, T_2) \sim \text{Geo}(r).$$

(i) Zeige hierfür zuerst, dass $\mathrm{P}\left(\max(T_1,T_2) > a\right) = (1-p)^a + (1-q)^a - (1-p)^a(1-q)^a$

(ii) Betrachte $\lim_{a\to\infty} \frac{\mathrm{P}(\max(T_1,T_2)>a)}{\mathrm{P}(\max(T_1,T_2)>a)} = 1$ um zu zeigen, dass kein r diese Gleichung erfüllen kann.

Lösung 5.3

(a)
- "$\implies$" Zuerst überprüfen wir $\mathrm{P}\left(T \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\right) = \mathrm{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\{T = k\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\left(T = k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = p\frac{1}{p} = 1.$[3]
  $\forall a \in \mathbb{N}:$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(T \geq a\right) &= \mathrm{P}\left(\bigsqcup_{k=a+1}^{\infty}\underbrace{\{T = k\}}_{\{\omega\in\Omega : T(\omega)=k\}}\right) \\
&= \sum_{k=a+1}^{\infty}\mathrm{P}\left(T = k\right) \\
&= \sum_{k=a+1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p \\
&= p\sum_{k=a}^{\infty}(1-p)^k \\
&= p\frac{(1-p)^a}{p} = (1-p)^a.
\end{aligned}$$

□

Alternative Beweisidee: T kann als der Index des ersten erfolgreichen i.i.d. Bernoulli-Experiment interpretiert werden, i.e., $T = \min\{\, i \in \mathbb{N}\setminus\{0\} : X_i = 1\,\}$, wobei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$. Dann gilt natürlich

$$\underbrace{\{T > a\}}_{\{\omega\in\Omega \,\mid\, T(\omega)>a\}} = \underbrace{\{\forall i \in \{1,\dots,a\} : X_i = 0\}}_{\{\omega\in\Omega \,\mid\, \forall i\in\{1,\dots,a\}: X_i(\omega)=0\}}.$$

Somit gilt wegen der Unabhängigket

$$\mathrm{P}\left(T > a\right) = \prod_{i=1}^{a}\mathrm{P}\left(X_i = 0\right) = (1-p)^a.$$

[2] Die Aussage gilt auch für $p \neq q$, aber dann wird der Beweis ein wenig länger.
[3] Die Wohldefniertheit und der Wertebereich der geometrischen Verteilung kann als allgemein bekannt vorasugesetzt werden und muss beispielsweise bei einer Prüfung nicht jedes Mal neu bewiesen werden.

- " $\Longleftarrow$ " *Idee: Die Verteilung einer $\mathbb{N}$-wertigen Zufallsvariable ist durch $(\mathrm{P}(T > a))_{a\in\mathbb{N}}$ schon eindeutig bestimmt und die obige Rechnung hat gezeigt, dass diese übereinstimmen.*

  Wegen obiger Rechnung gilt $\forall a \in \mathbb{N} : F_{\mathrm{Geo}(p)}(a) = 1-(1-p)^a$. Weil gemetrisch verteilte Zufallsvaraiblen nur Werte in $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ annehmen gilt somit.

  $$\forall\mathbb{R} \in \mathbb{N} : F_{\mathrm{Geo}(p)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a < 1 \\ 1-(1-p)^{\lfloor a\rfloor} & \text{wenn } a \geq 1. \end{cases}$$

  Aus $\mathrm{P}(T\in\mathbb{N}\setminus\{0\}) = 1$ und $\forall a \in \mathbb{N} : \mathrm{P}(T > a) = (1-p)^a$ folge offensichtlich auch

  $$\forall\mathbb{R} \in \mathbb{N} : F_T(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a < 1 \\ 1-(1-p)^{\lfloor a\rfloor} & \text{wenn } a \geq 1. \end{cases}$$

  Weil die Verteilungsfunktionen übereinstimmen, stimmen auch die Verteilungen überein. $\square$

  Alternativer Beweis für " $\Longleftarrow$ ":

  $$\begin{aligned}\mathrm{P}(T=k) &= \mathrm{P}(T\geq k) - \mathrm{P}(T>k) \overset{\mathrm{P}(T\in\mathbb{N}\setminus\{0\})=1}{=} \mathrm{P}(T>k-1) - \mathrm{P}(T>k)\\ &= (1-p)^{k-1} - (1-p)^k\\ &= (1-p)^{k-1}\left(1-(1-p)\right)\\ &= p(1-p)^{k-1}.\end{aligned}$$

(b) Offensichtlich gilt $\mathrm{P}(\min(T_1,T_2)\in\mathbb{N}\setminus\{0\}) = 1$. Mithilfe der Unabhängigkeit und (a) erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\min(T_1,T_2) > a) &= \mathrm{P}(T_1 > a, T_2 > a)\\ &= \mathrm{P}(T_1 > a)\,\mathrm{P}(T_2 > a)\\ &= (1-p)^a(1-q)^a = ((1-p)(1-q))^a.\end{aligned}$$

Somit ist laut (a), $\min(T_1,T_2)\sim\mathrm{Geo}(r)$ mir $(1-r) = (1-p)(1-q)$, also $r = 1-(1-p)(1-q)$.

(c) (i)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\max(T_1,T_2) > a) &= \mathrm{P}(T_1 > a \text{ oder } T_2 > a)\\ &= \mathrm{P}(T_1 > a) + \mathrm{P}(T_2 > a) - \mathrm{P}(T_1 > a \text{ und } T_2 > a)\\ &= (1-p)^a + (1-q)^a - (1-p)^a(1-q)^a\end{aligned}$$

(ii) Falls $\max(T_1,T_2)\sim\mathrm{Geo}(r)$ gelten würde, dann müsste

$$(1-p)^a + (1-q)^a - (1-p)^a(1-q)^a = (1-r)^a$$

für alle $a\in\mathbb{N}$ gelten. Weil wir $p = q$ annehmen müsste somit

$$2(1-p)^a - (1-p)^{2a} = (1-r)^a$$

gelten.

Das würde

$$\lim_{a\to\infty}\frac{2(1-p)^a-(1-p)^{2a}}{(1-r)^a} = 1$$

implizieren.

Fall 1: $r < p$:

$$\lim_{a\to\infty}\frac{2(1-p)^a-(1-p)^{2a}}{(1-r)^a} \leq \lim_{a\to\infty} 2\left(\frac{1-p}{1-r}\right)^a = 0 \neq 1$$

Somit können wir Fall 1 ausschliessen.

Fall 2: $r \geq p$:

$$\lim_{a\to\infty}\frac{2(1-p)^a-(1-p)^{2a}}{(1-r)^a} = \lim_{a\to\infty}\frac{2(1-p)^a}{(1-r)^a} \geq 2 \neq 1$$

Somit können wir Fall 2 auch ausschliessen. $\square(p = q)$

Ohne der Annahme $p = q$, war der Beweis zwar nicht verlangt, ist aber kaum schwieriger (aber etwas länger): Wir nehmen zuerst obdA an, dass $p < q$ gilt. Dann sieht man direkt, dass

$$\lim_{a\to\infty} \frac{(1-p)^a + (1-q)^a - (1-p)^a(1-q)^a}{(1-r)^a} = \lim_{a\to\infty} \frac{(1-p)^a}{(1-r)^a}$$

gilt, oder man rechnet in den beiden Fällen langsamer nach:
Fall 1: $r < p$:

$$\lim_{a\to\infty} \frac{(1-p)^a + (1-q)^a - (1-p)^a(1-q)^a}{(1-r)^a} \leq \lim_{a\to\infty} 2\left(\frac{1-p}{1-r}\right)^a = 0 \neq 1.$$

Somit können wir Fall 1 ausschliessen.
Fall 2: $r > p$:

$$\lim_{a\to\infty} \frac{(1-p)^a + (1-q)^a - (1-p)^a(1-q)^a}{(1-r)^a} \geq \lim_{a\to\infty} \frac{(1-p)^a}{(1-r)^a} = \infty \neq 1.$$

Somit können wir Fall 2 auch ausschliessen.
Fall 3: $r = p$:

$$\lim_{a\to\infty} \frac{(1-p)^a + (1-q)^a - (1-p)^a(1-q)^a}{(1-r)^a} = \lim_{a\to\infty} \frac{(1-p)^a}{(1-r)^a} = 1$$

Nur im Fall 3 ($r = p$) erhalten wir den widerspruchsfreien Limes. Für $a = 1$, können wir allerdings auch den Fall $r = p$ auf einen Widerspruch bringen Für $a = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & (1-p) + (1-q) - (1-p)(1-q) = (1-r) \\ \iff & (1-p) + (1-q) - (1-p)(1-q) = (1-p) \\ \iff & (1-q) - (1-p)(1-q) = 0 \\ \overset{(1-q)\neq 0}{\iff} & 1 - (1-p) = 0 \\ \iff & p = 0, \end{aligned}$$

was einen Widerspruch zu $(p,q) \in (0,1]^2$ darstellt. $\square$(allgemein)

Alternativer Beweis ohne $a \to \infty$, nur über $a = 1$ und $a = 2$ Für $a = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & (1-p) + (1-q) - (1-p)(1-q) = (1-r) \\ \iff & r = 1 - ((1-p) + (1-q) - (1-p)(1-q)) \\ \iff & r = 1 - (2 - p - q - (1-p)(1-q)) \\ \iff & r = -1 + p + q + (1-p)(1-q) = p + q + (1-p)(1-q) - 1. \end{aligned}$$

Unter der Annahme $p = q$ erhalten wir, also $r = 2p + (1-p)^2 - 1$. Für $a = 2$ erhalten wir durch einsetzen von r unter dieser Annahme,

$$\begin{aligned} & (1-p)^2 + (1-q)^2 - (1-p)^2(1-q)^2 = (1-r)^2 \\ \iff & 2(1-p)^2 - (1-p)^4 = \left(2p + (1-p)^2\right)^2 \\ \iff & 2(1-p)^2 - (1-p)^4 = \left(2p + 1 - 2p + p^2\right)^2 \\ \iff & 2(1-p)^2 - (1-p)^4 = \left(1 + p^2\right)^2 \\ \iff & 2(1-p)^2 - (1-p)^4 = 1 + 2p^2 + p^4. \end{aligned}$$

Mit WolframAlpha kann man diese Gleichung einfach lösen (https://www.wolframalpha.com/input?i=2%281-p%29%5E2+-+%281-p%29%5E4+%3D+%5Cleft%281%2Bp%5E2%5Cright%29%5E2) und sehen, dass $p = 0$ die einzige reelwertige Lösung dieser Gleichung ist. $\square$(p=q)

Für beliebige $(p,q) \in (0,1]^2$ ginge der Beweis folgendermassen: Für $a = 2$ erhalten wir durch einsetzen von r,

$$\begin{aligned} & (1-p)^2 + (1-q)^2 - (1-p)^2(1-q)^2 = (1-r)^2 \\ \iff & (1-p)^2 + (1-q)^2 - (1-p)^2(1-q)^2 = (p + q + (1-p)(1-q))^2 . \end{aligned}$$

In WolframAlpha (https://www.wolframalpha.com/input?i=%281-p%29%5E2%2B%281-q%29%5E2+-+%281-p%29%5E2%281-q%29%5E2+%3D+%5Cleft%28p%2Bq+%2B+%281-p%29%281-q%29%5Cright%29%5E2) können wir sehen, dass alle Lösungen dieser Gleichung ausserhalb von $(0,1]^2$ liegen. Das beweist, dass für alle $(p,q) \in (0,1]^2$, kein r existiert mit dem $\max(T_1, T_2) \sim \mathrm{Geo}(r)$ gelten würde. $\square$(allgemein)

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).