ETH Zürich, Frühling 2024
Dozent: Prof. Dr. Vincent Tassion Übungsorganisator: Jakob Heiss

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 6

Lösung Version 2 (21. April 2024: Lösung von Aufgabe 6.2(b) überarbeitet und weitere kleine Detail-Änderungen.), Lösung Version 1 (18.4.: basierend auf Serie Version 1 (11. April))
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **16. April** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **18. April 8:00**. Nachher kann selbstständig mit dieser Lösung verglichen werden.

Aufgabe 6.1 [Diskrete Zufallsvariable: Verteilungsfuntion und Gewichtsfunktion]
Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 1, \\ 1/5, & \text{falls } 1 \leq a < 4, \\ 3/4, & \text{falls } 4 \leq a < 6, \\ 1, & \text{falls } 6 \leq a. \end{cases}$$

(a) Skizziere die Verteilungsfunktion von X.

(b) Zeige, dass X eine diskrete Zufallsvariable ist.

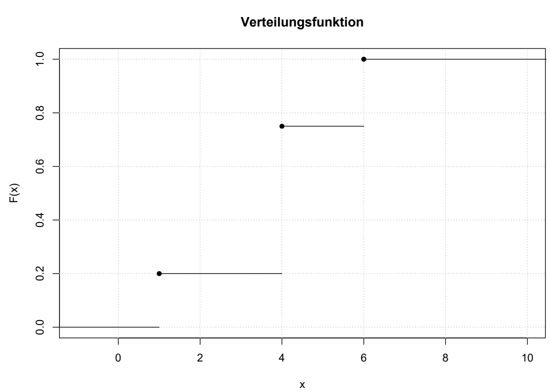
(c) Berechne die Gewichtsfunktion von X und skizziere diese.

(d) Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathrm{P}(X = 6), \ \mathrm{P}(X = 5), \ \mathrm{P}(2 < X < 5.5), \ \mathrm{P}(0 \leq X < 4).$$

Lösung 6.1

(a) Die folgende Skizze zeigt die Verteilungsfunktion von X:



(b) Wir stellen fest, dass

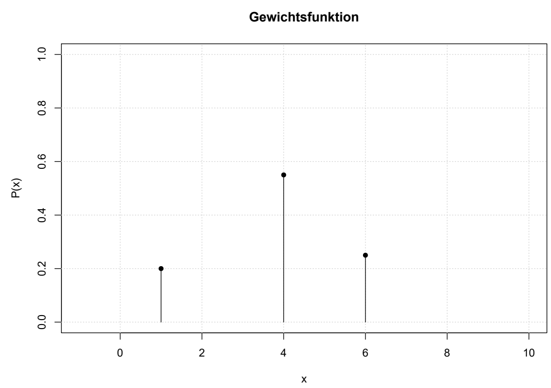
$$\mathrm{P}(X = 1) = 1/5, \quad \mathrm{P}(X = 4) = 3/4 - 1/5 = 11/20, \quad \mathrm{P}(X = 6) = 1/4$$

und $\mathrm{P}(X = x) = 0$ für alle $x \notin \{1, 4, 6\}$. Somit gilt $\mathrm{P}(X \in \{1, 4, 6\}) = 1$ und da die Menge $\{1, 4, 6\}$ endlich ist, ist die Zufallsvariable X diskret.

(c) Die Gewichtsfunktion / Verteilung ist gegeben durch $(p(x))_{x \in \{1,4,6\}}$ mit

$$p(1) = \mathrm{P}(X = 1) = 1/5, \quad p(4) = \mathrm{P}(X = 4) = 3/4 - 1/5 = 11/20 \quad \text{und } p(6) = \mathrm{P}(X = 6) = 1/4.$$

Diese ist in der folgenden Skizze dargestellt:



(d) Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(X = 6\right) = p(6) = 1/4, \\
&\mathrm{P}\left(X = 5\right) = 0, \\
&\mathrm{P}\left(2 < X < 5.5\right) = p(4) = 11/20, \\
&\mathrm{P}\left(0 \leq X < 4\right) = p(1) = 1/5.
\end{aligned}
$$

.

Aufgabe 6.2 [Stetige Zufallsvariablen: Verteilungsfunktion und Dichte]
Sei T eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_T(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0, \\ 1 - e^{-2a}, & \text{falls } a \geq 0. \end{cases}$$

(a) Skizziere die Verteilungsfunktion von T.

(b) Zeige, dass T eine stetige Zufallsvariable ist.

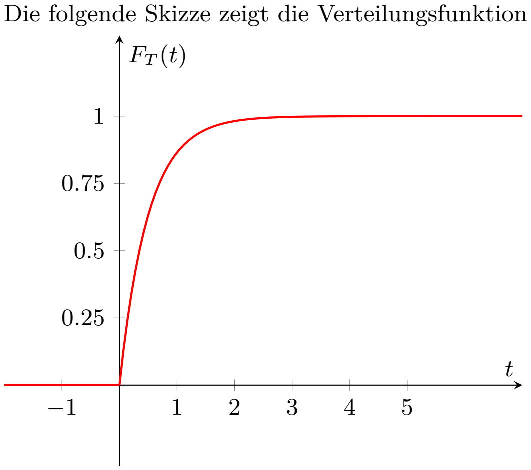
(c) Berechne die Dichte von T.

(d) Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathrm{P}\left(T = 2\right), \ \mathrm{P}\left(T \leq 1\right), \ \mathrm{P}\left(T \geq 2\right), \ \mathrm{P}\left(1 < T < 4\right).$$

Lösung 6.2

(a) Die folgende Skizze zeigt die Verteilungsfunktion von T:



(b) T ist stetig, weil F_T stetig ist (siehe Notizen 7 (Seite 4)), denn wir stellen fest, dass die Verteilungsfunktion F_T auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ stetig ist. Bei 0 ist F_T auch stetig weil $F_T(0+) = F_T(0) = 1 - e^{-0} = 0 = F_T(0-)$.

Achtung: Notizen 7 von diesem Jahr verwendet eine andere Notation als das Skript von 2022! Bei uns (zB in Notizen 7) wird jede Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion als stetig bezeichnet, auch wenn die Zufallsvariable keine Dichte hat (siehe Notizen 7 (Seite 4)). (Im Skript von 2022 wurden nur Zufallsvariablen die eine Dichte haben als stetig bezeichnet.)

Zusätzlich könnten wir für diese Zufallsvariable sogar zeigen, dass T eine Dichte hat: Wir stellen fest, dass die Verteilungsfunktion F_T stückweise stetig differenzierbar ist. Genauer gesagt ist F_T auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbar, und bei 0 ist F_T stetig. Somit folgt aus dem Theorem in Notizen 7 (Seite 20) (siehe Theorem 3.26 im Skript), dass T eine Dichte hat.

(c) Da F_T stückweise stetig differenzierbar ist, können wir erneut Theorem 3.26 aus dem Skript (Notizen 7 (Seite 20)) anwenden, um die Dichte von T zu berechnen. Wir erhalten

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0, \\ 2e^{-2t} & \text{falls } t \geq 0, \end{cases}$$

wobei wir den Wert an der Stelle $t = 0$ beliebig gewählt haben.

(d) Da die Zufallsvariable T stetig ist, gilt $\mathrm{P}(T = t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (siehe Satz 3.1 im Skript und Aufgabe 4.3). Somit gilt insbesondere

$$\mathrm{P}(T = 2) = 0.$$

Weiterhin erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(T \leq 1) = F_T(1) = 1 - e^{-2}, \\
&\mathrm{P}(T \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(T < 2) = 1 + \underbrace{\mathrm{P}(T = 2)}_{=0} - \underbrace{\mathrm{P}(T \leq 2)}_{=F_T(2)} = e^{-4}, \\
&\mathrm{P}(1 < T < 4) = \mathrm{P}(T < 4) - \mathrm{P}(T \leq 1) = \underbrace{\mathrm{P}(T \leq 4)}_{=F_T(4)} - \underbrace{\mathrm{P}(T = 4)}_{=0} - \underbrace{\mathrm{P}(T \leq 1)}_{=F_T(1)} = e^{-2} - e^{-8}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.3 [Anwendung der Exponentialverteilung]
Wir betrachten eine Messsonde an einem Vulkankrater, welche den bevorstehenden Ausbruch beobachten soll. Ab Beginn der Messungen gehen wir davon aus, dass die Sonde innerhalb von einer Minute mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{20}$ wegen zu grosser Beschädigung ausfällt. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Lebensdauer der Sonde in Minuten. Es gilt $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, d.h. Y ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Bestimme λ.

Hinweis: Falls Du a) nicht gelöst hast, so rechne für die weiteren Teilaufgaben mit $\lambda = -\ln(0.95)$.

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde mehr als 10 Minuten überlebt?

(c) Wir wissen, dass die Sonde schon mehr als 20 Minuten überlebt hat. Wie gross ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde nochmals 10 Minuten überlebt?

Lösung 6.3

(a) Gemäss Annahme in der Aufgabenstellung gilt $\mathrm{P}(Y \leq 1) = \frac{1}{20}$, also $\mathrm{P}(Y > 1) = 0.95$. Aus Notizen 7 (Seite 15) wissen wir (siehe Exponentialverteilung in Kapitel 3, Abschnitt 6 im Skript), dass $\mathrm{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$ für eine $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable T. Es muss also gelten

$$0.95 = e^{-\lambda}$$

und somit ist $\lambda = -\ln(0.95)$.

(b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde mehr als 10 Minuten überlebt, ist

$$\mathrm{P}(Y > 10) = e^{-\lambda \cdot 10} = e^{10 \ln(0.95)} = (0.95)^{10} \approx 0.5987.$$

Alternativ ist

$$\mathrm{P}(Y > 10) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq 10) = 1 - F_Y(10) = 1 - (1 - e^{\ln(0.95)10}) = 0.95^{10}.$$

(c) Aus Notizen 7 (Seite 15) ist bekannt, dass die Exponentialverteilung gedächtnislos ist, also dass für alle $s, t \geq 0$ gilt

$$\mathrm{P}(T > t + s | T > t) = \mathrm{P}(T > s).$$

Also folgt, dass

$$\mathrm{P}(Y > 30 | Y > 20) = \mathrm{P}(Y > 10) = 0.95^{10}.$$

If you have paid full attention to the end of the lecture from April 11th you can solve Aufgaben 6.4 and 6.5 already today. Otherwise, solve Aufgaben 6.4 and 6.5 after Tuesday, April 16th, when Notes 8 will be online.

Aufgabe 6.4 Alice rolls a die (Würfel) and pays the square of the resulting number (quadrierte Augenzahl) to Bob in CHF.

i) Define a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ that describes rolling the die.

ii) Define a random variable X that describes how many CHF Bob receives, and write down its probability mass function (Gewichtsfunktion)[1] p_X.

iii) Calculate the expected value $\mathbb{E}[X]$.

Lösung 6.4

(a) $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathrm{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ with $p(\omega) := \frac{1}{6}\ \forall \omega \in \Omega$.

(b) $X : \Omega \to W := \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$, $\omega \mapsto X(\omega) := \omega^2$. The probability mass function $(p_X(x))_{x \in W}$ of X is given by $p_X(x) := \mathrm{P}(X = x) = \frac{1}{6}\ \forall x \in W$.

Note: The probability distribution (Vertailung) $(p_X(x))_{x \in W}$ is not the same as the probability distribution function (Verteilungsfunktion[2]) F_X (but one can easily obtain one from another).

(c) From the theorem in Notes 8 (page 7) we get,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W} x\mathrm{P}(X = x) = \sum_{x \in W} x p_X(x) = \sum_{x \in \{1,4,9,16,25,36\}} x\frac{1}{6} = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6} \approx 15.1667.$$

Alternative solution: From the defining equation in Notes 8 (page 2), we get,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \omega^2 \frac{1}{6} = \sum_{\omega \in \{1,2,3,4,5,6\}} \omega^2 \frac{1}{6} = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6} \approx 15.1667.$$

Aufgabe 6.5

(a) Construct a discrete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ with $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ and discrete random variables $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ on it, such that

i) $\mathrm{P}(X < \infty) = 1$ and $\mathbb{E}[X] = \infty$.

ii) $\mathbb{E}[Y] < \infty$ and $\mathbb{E}[Y^2] = \infty$.

[1] Die Gewichtsfunktion $(p_X(x))_{x \in W}$ wird in der Literatur häufig auch als "(Wahrscheinlichkeits)verteilung", "(Wahrscheinlichkeits-)Gewichtsfunktion", "(Wahrscheinlichkeits-)Gewicht(ung)" oder als "diskrete (Wahrscheinlichkeits-)Dichte" (oder als "Radon-Nikodým-Dichte bezüglich des Zählmasses") bezeichnet. In English, the probability mass function is often simply denoted as "(probability) distribution" (or as "Radon–Nikodym derivative with respect to the counting measure").

[2] Die Verteilungsfunktion F_X wird in der Literatur häufig auch als Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion, kumulative (Wahrscheinlichkeits-)Verteilungsfunktion, **c**umulative (probability) **d**istribution **f**unction, cdf oder CDF bezeichnet.

(b) Is it possible to construct on a discrete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ a discrete random variable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ such that $\mathbb{E}[Z] = \infty$ and $\mathbb{E}\left[Z^2\right] < \infty$?

Lösung 6.5

(a) For example we can choose $\Omega := \mathbb{N}$, $\mathcal{F} := 2^{\Omega}$, $\mathrm{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ with $p(\omega) := 2^{-\omega}$ $\forall \omega \in \Omega$. P is indeed a probability measure as $\mathrm{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} 2^{(-\omega)} = 1$ adds up to one as a geometric series.

i) $X : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto X(\omega) := 2^{\omega}$. Thus $X(\omega) < \infty$ for all $\omega \in \Omega$. Therefore, $\mathrm{P}(X < \infty) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$. Further, using the defining equation in Notes 8 (page 2), we get

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \underbrace{2^{\omega} 2^{-\omega}}_{=1} = \infty.$$

ii) $Y : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto Y(\omega) := \left(\frac{3}{2}\right)^{\omega}$. Then using the defining equation in Notes 8 (page 2), we get

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^{\omega} 2^{-\omega}}_{=\left(\frac{3}{4}\right)^{\omega}} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 3 < \infty,$$

because $\frac{3}{4} < 1$. Using the same definition for Y^2, we get

$$\mathbb{E}\left[Y^2\right] = \sum_{\omega \in \Omega} Y^2(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{\omega} 2^{-\omega}}_{=\left(\frac{9}{8}\right)^{\omega}} = \infty,$$

because $\frac{9}{8} > 1$.

Alternative solution: For example we can choose $\Omega := \mathbb{N}$, $\mathcal{F} := 2^{\Omega}$, $\mathrm{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ with $p(\omega) := \frac{90}{\omega^4 \pi^2}$ $\forall \omega \in \Omega$. P is indeed a probability measure as $\mathrm{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \frac{90}{\omega^4 \pi^2} = 1$ adds up to one as an over-harmonic series.

i) $X : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto X(\omega) := \omega^4$. Thus $X(\omega) < \infty$ for all $\omega \in \Omega$. Therefore, $\mathrm{P}(X < \infty) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$. Further, using the defining equation in Notes 8 (page 2), we get

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \underbrace{\omega^4 \frac{90}{\omega^4 \pi^2}}_{=\frac{90}{\pi^2}} = \infty$$

ii) $Y : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto Y(\omega) := \omega^2$. Then using the defining equation in Notes 8 (page 2), we get

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \underbrace{\omega^2 \frac{90}{\omega^4 \pi^2}}_{=\frac{90}{\omega^2 \pi^2}} = \frac{\pi^2}{6} \frac{90}{\pi^2} = 15 < \infty.$$

Using the same definition for Y^2, we get

$$\mathbb{E}\left[Y^2\right] = \sum_{\omega \in \Omega} Y^2(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\omega^2\right)^2 \frac{90}{\omega^4 \pi^2}}_{=\frac{90}{\pi^2}} = \infty.$$

(b) This is not possible, since $\mathbb{E}\left[Z^2\right] < \infty$ implies $\mathbb{E}[Z] < \infty$. Proof: For a discrete probability space, we have already defined the expected value in the lecture as

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) p(\omega)$$

Since $p = p^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}}$, we can rewrite this sum to enable us to apply the Cauchy-Schwarz inequality for sequences, to obtain

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{\omega \in \Omega} \left(Z(\omega) p^{\frac{1}{2}}(\omega)\right) p^{\frac{1}{2}}(\omega) \leq \left(\underbrace{\sum_{\omega \in \Omega} Z^2(\omega) p(\omega)}_{=\mathbb{E}\left[Z^2\right]}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\underbrace{\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)}_{=\mathrm{P}(\Omega)=1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbb{E}\left[Z^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).