Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 7

Lösung Version 1 (25. April 2024: basierend auf Serie Version 1 (18. April))
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **23. April** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **25. April 8:00**. Nachher kann selbstständig mit dieser Lösung verglichen werden.

Aufgabe 7.1 [Erwartungswert stetiger Zufallsvariablen I]
Nehmen wir an, dass $-\infty < a < b < \infty$ und $c > 0$.

(a) Sei $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ und $U' := a + (b-a)U$. Was ist der Erwartungswert von U'?

(b) Sei $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$ und $T' := c \cdot T^2$. Was ist der Erwartungswert von T'?
Hinweis: Nutze den Satz in Notizen 8 (Seite 22).

Lösung 7.1

(a) Wir nutzen die linearität des Erwartungswert und erhalten

$$\mathbb{E}\left[U'\right] = \mathbb{E}\left[a + (b-a)U\right] = a + (b-a)\mathbb{E}\left[U\right] = a + (b-a)\frac{1}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Alternative Lösung: Sei $U' := a + (b-a)U$. Dann gilt für $x \in R$

$$F_{U'}(x) = P[U' \le x] = P\left[U \le \frac{x-a}{b-a}\right] = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{x-a}{b-a} < 0, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } 0 \le \frac{x-a}{b-a} \le 1, \\ 1 & \text{für } \frac{x-a}{b-a} > 1. \end{cases}$$

Durch Umformen folgt, dass

$$F_{U'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \le x \le b, \\ 1 & \text{für } x > b. \end{cases}$$

Also ist $U' \sim \mathcal{U}(a,b)$. Somit gilt

$$\mathbb{E}\left[U'\right] = \frac{b+a}{2}.$$

(b) Aufgrund der Lineariät des Erwartungswerts gilt $\mathbb{E}\left[T'\right] = \mathbb{E}\left[cT^2\right] = c \cdot \mathbb{E}\left[T^2\right]$. Wir berechnen nun mittels des den Satz in Notizen 8 (Seite 22)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[T^2\right] &= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \underbrace{\left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx}_{=\frac{2}{\lambda}\mathbb{E}[T]} \\ &= \frac{2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

wobei wir $\mathbb{E}\left[T\right] = 1/\lambda$ aus der Anwendung in Notizen 8 (Seite 6) verwendet haben. Somit folgt

$$\mathbb{E}\left[T'\right] = \frac{2c}{\lambda^2}.$$

Aufgabe 7.2 [Erwartungswert stetiger Zufallsvaraiblen II]
Sei $r > 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1, \\ cx^{-r} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

für ein $c > 0$.

(a) Bestimme die Konstante c, sodass f zu einer Dichtefunktion wird.

(b) Wir nehmen ab jetzt an, dass die Konstante so bestimmt ist, dass f zu einer Dichtefunktion wird. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X = f$. Berechne die Verteilungsfunktion von X.

(c) Berechne den Erwartungswert von X. Für welche Werte von r ist der Erwartungswert endlich?

Lösung 7.2

(a) Wir bemerken zuerst, dass $f \geq 0$. Damit f zu einer Dichtefunktion wird, muss

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} cx^{-r}dx = c\left[\frac{1}{-r+1}x^{-r+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{c}{r-1}$$

gelten. Mit $c = r - 1$ wird somit f zu einer Dichtefunktion.

(b) Die Verteilungsfunktion von X ist

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Für $t \leq 1$ ist

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = 0,$$

da $f_X(x) = 0$ für $x \leq 1$. Für $t > 1$ ist

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_1^t f_X(x)dx \\ &= \int_1^t (r-1)x^{-r}dx \\ &= (r-1)\left[\frac{1}{-r+1}x^{-r+1}\right]_{x=1}^{x=t} \\ &= -(t^{-r+1} - 1) = 1 - t^{-r+1}. \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion F_X ist demnach gegeben durch

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 1, \\ 1 - t^{-r+1} & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

(c) Wir stellen zuerst fest, dass $\mathrm{P}(X \geq 1) = 1$ und somit ist der Erwartungswert von X wohldefiniert, da X positive Werte annimmt. Wir berechnen für $r \neq 2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx &= \int_1^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx \\ &= \int_1^{+\infty} (r-1)x^{-r+1}dx \\ &= (r-1)\left[\frac{1}{-r+2}x^{-r+2}\right]_1^{\infty} \\ &= \begin{cases} \frac{r-1}{r-2}, & \text{falls } r > 2, \\ \infty, & \text{falls } r \in (1, 2). \end{cases} \end{aligned}$$

Für $r = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx &= \int_{1}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx \\ &= \int_{1}^{+\infty} (r-1)x^{-1}dx \\ &= (r-1)\left[\log(x)\right]_1^{\infty} = \infty.\end{aligned}$$

Der Erwartungswert ist also endlich, falls $r > 2$.

Aufgabe 7.3 [Erwartungswert unabhängigiger von Zufallsvarablen]
Seien T_1, T_2, T_3 drei unabhängige Zufallsvariablen mit

$$T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), \quad \forall i \in \{1,2,3\}.$$

Definiere die Zufallsvariable $S := T_1 \cdot T_2$.

(a) Berechne den Erwartungswert von S.
Hinweis: Nutze den Satz in Notizen 8 (Seite 20).

(b) Zeige, dass die Zufallsvariablen S und T_3 unabhängig sind.
Hinweis: Nutze das Resultat aus Satz 2.7 aus dem Skript zur Gruppierung von unabhängigen Zufallsvariablen.

Lösung 7.3

(a) Wir verwenden Theorem 4.13, also dass für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Somit folgt

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[T_1 \cdot T_2] = \mathbb{E}[T_1] \cdot \mathbb{E}[T_2] = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}.$$

(b) Dies folgt aus einem allgemeinen Resultat über die Gruppierung von unabhängigen Zufallsvariablen (siehe Satz 2.7 aus dem Skript). Wir definieren $\phi_1(x,y) = x \cdot y$ und $\phi_2(x) = x$. Da T_1, T_2, T_3 nach Annahme unabhängig sind, folgt dass

$$S = T_1 \cdot T_2 = \phi_1(T_1, T_2) \quad \text{und} \quad T_3 = \phi_2(T_3)$$

unabhängig sind. Daher gilt.

$$\mathbb{E}[T_1 \cdot T_2 \cdot T_3] = \mathbb{E}[S \cdot T_3] = \mathbb{E}[S] \cdot \mathbb{E}[T_3] = \mathbb{E}[T_1] \cdot \mathbb{E}[T_2] \cdot \mathbb{E}[T_3].$$

Aufgabe 7.4 [Verteilung stetiger Zufallsvektoren: Extrema gleichverteilter Zufalsvariablen]
Seien U_1, U_2, U_3 unabhängige, $\mathcal{U}([0,1])$-verteilte Zufallsvariablen. Wir betrachten die stetigen Zufallsvariablen

$$L := \min(U_1, U_2, U_3) \quad \text{und} \quad M := \max(U_1, U_2, U_3).$$

(a) Berechne den Erwartungswert von M und L.

(b) Zeige, dass für $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt

$$\mathbb{E}[\phi(M) \cdot \psi(L)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(m) \cdot \psi(\ell) \cdot 6(m-\ell)\mathbb{1}_{0 \le \ell \le m \le 1}\, d\ell dm.$$

(c) Nutze (b), um die Verteilungsfunktion und die Dichte des Zufallsvektors (M, L) zu bestimmen.[1]

Lösung 7.4

(a) *Variante 1:* Hierzu stellen wir zunächst fest, dass die Zufallsvariable U_1 die Dichte $f_1(u) = \mathbb{1}_{u\in[0,1]}$ hat und da U_1, U_2, U_3 unabhängig und identisch verteilt sind, folgt aus dem Satz in Notizen 8 (Seite 24) (bzw. aus Theorem 5.11 aus dem Skript, dass die drei Zufallsvariablen die gemeinsame Dichte

$$f(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{1}_{u_1\in[0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_2\in[0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_3\in[0,1]}$$

haben. Weil $\phi = \max : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt ist, können wir den Satz in Notizen 8 (Seite 25) (bzw. Satz 5.10 aus dem Skript) anwenden:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \max(u_1, u_2, u_3)\mathbb{1}_{u_1\in[0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_2\in[0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_3\in[0,1]} du_1 du_2 du_3 \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \max(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3.\end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun verschiedene Fällen, je nachdem welche Variable das Maximum annimmt. Es gilt

$$1 \overset{\text{f.s.}}{=} \sum_{i,j,k:\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} \mathbb{1}_{U_i\leq U_j\leq U_k}, \tag{1}$$

[2]

wobei wir über die sechs möglichen Permutationen von $(1, 2, 3)$ summiert haben. Wir berechnen nun das Integral für den Fall $u_3 \leq u_2 \leq u_1$:

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \max(u_1, u_2, u_3)\mathbb{1}_{u_3\leq u_2\leq u_1} du_1 du_2 du_3 \\ &= \int_0^1 u_1 \left(\int_0^{u_1} \underbrace{\left(\int_0^{u_2} du_3 \right)}_{=u_2} du_2 \right) du_1 = \int_0^1 u_1 \frac{1}{2} u_1^2 \, du_1 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 u_1^3 \, du_1 = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Da die sechs Fälle symmetrisch sind, erhalten wir

$$\mathbb{E}[M] = 6\frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

Um die Dichte von L zu bestimmen, können wir analog zur obigen Berechnung vorgehen und erhalten $\mathbb{E}[L] = \frac{1}{4}$. Alternativ können wir feststellen, dass

$$L = \min(U_1, U_2, U_3) = 1 - \max(1 - U_1, 1 - U_2, 1 - U_3).$$

Da $(1-U_1, 1-U_2, 1-U_3)$ aus Symmetriegründen die gleiche gemeinsame Dichte hat wie (U_1, U_2, U_3), hat L die gleiche Verlteilung wie $1 - M$ und auf diese Weise erhält man ebenfalls $\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[1 - M] = \mathbb{E}[1] - \mathbb{E}[M] = 1 - \mathbb{E}[M] = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Variante 2: Wir bestimmen die Verteilungsfunktion und leiten diese dann ab um die Dichte zu erhalten mit der man direkt den Erwartungswert berechnen kann.

Wir bemerken zuerst, dass der Wertebereich von M das Einheitsintervall $[0, 1]$ ist. Für $m \in [0, 1]$ gilt mit der Unabhängigkeit und der Gleichverteilung von U_1, U_2 und U_3, dass

$$P[M \leq m] = P[U_1 \leq m, U_2 \leq m, U_3 \leq m] = (P[U_1 \leq m])^3 = m^3.$$

[1] Die Verteilungsfunktion beziehungsweise die Dichte des Zufallsvektors (M, L) werden auch als "gemeinsame Verteilungsfunktion" beziehungsweise "gemeinsame Dichte von (M, L)" bezeichnet.

[2] Die rechte Seite der Gleichung $1 \overset{\text{Lebesgue-fast überall}}{=} \sum_{i,j,k:\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} \mathbb{1}_{u_i\leq u_j\leq u_k}$ zählt Fälle wo $u_i = u_j$ gilt mehrfach falls $i \neq j$. Somit gilt die Gleichheit nicht für solche u_1, u_2, u_3. Aber für unabhängige uniform verteilte Zufallsvariablen U_1, U_2, U_3 gilt $\mathrm{P}(U_i = U_j) = 0$, falls $i \neq j$. Somit gilt Gleichung (1) *fast sicher*.

Also ist die Verteilungsfunktion F_M von M gegeben durch

$$F_M(m) = \begin{cases} 0 & \text{für } m < 0, \\ m^3 & \text{für } 0 \leq m \leq 1, \\ 1 & \text{für } m > 1. \end{cases}$$

Für $m \in (0,1)$ gilt also

$$f_M(m) = F_M'(m) = 3m^2,$$

und somit ist die Dichte von M gegeben durch

$$f_M(m) = \begin{cases} 0 & \text{für } m < 0, \\ 3m^2 & \text{für } 0 \leq m \leq 1, \\ 0 & \text{für } m > 1. \end{cases}$$

Somit erhalten wir

$$\mathbb{E}[M] = \int_{-\infty}^{\infty} m f_M(m) dm = \int_0^1 m 3m^2 dm = 3\int_0^1 m^3 dm = \frac{3}{4}.$$

Um den Erwartungswert von L zu bestimmen, kann man analog vorgehen oder wie in Variante 1 die Symmetrie nutzen. In beiden Fällen erhält man $\mathbb{E}[L] = \frac{1}{4}$.

Bemerkung: Um die Dichte von L zu bestimmen, kann man analog vorgehen oder wie in Variante 1 die Symmetrie nutzen. In beiden Fällen erhält man $f_L(\ell) = 3(1-\ell)^2 \mathbb{1}_{\ell \in [0,1]}$. Somit erhalten wir

$$\mathbb{E}[L] = \int_{-\infty}^{\infty} \ell f_L(\ell) d\ell = \int_0^1 \ell 3(1-\ell)^2 d\ell = 3\int_0^1 \left(\ell - 2\ell^2 + \ell^3\right) d\ell = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

(b) Seien $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Mittels der gemeinsamen Dichte von U_1, U_2, U_3 aus Teilaufgabe (a) und den Satz in Notizen 8 (Seite 25) (bzw. Satz 5.10 aus dem Skript) berechnen wir

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\phi(M) \cdot \psi(L)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\max(u_1,u_2,u_3)\right) \psi\left(\min(u_1,u_2,u_3)\right) \mathbb{1}_{u_1 \in [0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_2 \in [0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_3 \in [0,1]} du_1 du_2 du_3 \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \phi\left(\max(u_1,u_2,u_3)\right) \psi\left(\min(u_1,u_2,u_3)\right) du_1 du_2 du_3. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir für die Anwendung des Satz in Notizen 8 (Seite 25) (bzw. Satz 5.10 aus dem Skript) verwendet, dass $\varphi(u_1,u_2,u_3) := \phi\left(\max(u_1,u_2,u_3)\right) \psi\left(\min(u_1,u_2,u_3)\right)$ eine messbare und beschränkte Funktion von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ definiert.

Wir unterscheiden wieder verschiedene Fällen, je nachdem welche Variable das Maximum und welche das Minimum annimmt. Dazu verwenden wir wieder Gleichung (1) aus (a). Wir berechnen nun das Integral für den Fall $u_3 \leq u_2 \leq u_1$:

$$\begin{aligned} &\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \phi\left(\max(u_1,u_2,u_3)\right) \psi\left(\min(u_1,u_2,u_3)\right) \mathbb{1}_{u_3 \leq u_2 \leq u_1} du_1 du_2 du_3 \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \phi(u_1)\, \psi(u_3)\, \mathbb{1}_{u_3 \leq u_2 \leq u_1} du_1 du_2 du_3 \\ &= \int_0^1 \phi(u_1) \left(\int_0^{u_1} \psi(u_3) \underbrace{\left(\int_{u_3}^{u_1} du_2 \right)}_{= u_1 - u_3} du_3 \right) du_1 \\ &= \int_0^1\int_0^1 \phi(u_1)\, \psi(u_3)(u_1 - u_3) \mathbb{1}_{u_3 \leq u_1}\, du_1 du_3 \end{aligned}$$

Da die sechs Fälle symmetrisch sind, erhalten wir

$$\mathbb{E}[\phi(M)\psi(L)] = 6 \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(m)\psi(\ell)(m-\ell)\mathbb{1}_{0 \leq \ell \leq m \leq 1}\, dm d\ell,$$

was zu zeigen war.

(c) Für $a, b \in R$ wählen wir $\phi(x) := \mathbb{1}_{x \le a}$ und $\psi(x) := \mathbb{1}_{x \le b}$ und erhalten

$$\begin{aligned} F_{M,L}(a,b) = \mathrm{P}\left(M \le a, L \le b\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{M \le a} \cdot \mathbb{1}_{L \le b}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{m \le a} \mathbb{1}_{\ell \le b} \cdot 6(m-\ell) \mathbb{1}_{0 \le \ell \le m \le 1} \, dm d\ell \\ &= \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} 6(m-\ell) \mathbb{1}_{0 \le \ell \le m \le 1} \, dm d\ell \end{aligned}$$

und somit folgt gemäss der Definition in Notizen 8 (Seite 24) (bzw. Definition 5.7 aus dem Skript), dass (M, L) die gemeinsame Dichte

$$f_{M,L}(m,\ell) = 6(m-\ell)\mathbb{1}_{0 \le \ell \le m \le 1}$$

hat. Um die Verteilungsfunktion zu erhalten, berechnen wir obiges Integral. Wir stellen zunächst fest, dass die Verteilungsfunktion für $a \notin [0,1]$ oder $b \notin [0,1]$ leicht zu bestimmen ist. Genauer gilt für $a \le 0$ oder $b \le 0$, dass $F_{M,L}(a,b) = 0$, für $b \ge 1$ erhalten wir

$$F_{M,L}(a,b) = F_M(a) = a^3$$

und für $a \ge 1$,

$$F_{M,L}(a,b) = F_L(b) = 1 - (1-b)^3.$$

Weiterhin gilt für $0 \le a \le b \le 1$

$$F_{M,L}(a,b) = \mathrm{P}\left(M \le a, L \le b\right) \overset{(L \le M)}{=} \mathrm{P}\left(M \le a\right) = a^3.$$

Für $0 \le b \le a \le 1$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(M \le a, L \le b\right) &= \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} 6(m-\ell)\mathbb{1}_{0 \le \ell \le m \le 1} \, dm d\ell = \int_0^a \left(\int_0^{\min(b,m)} 6(m-\ell) \, d\ell \right) dm \\ &= \int_0^a \left[6m\ell - 3\ell^2\right]_0^{\min(b,m)} dm = \int_0^b 3m^2 \, dm + \int_b^a 3b(2m-b) \, dm \\ &= b^3 + \left[3b(m^2 - bm)\right]_b^a = b^3 + 3ab(a-b). \end{aligned}$$

Indem wir all diese Fälle zusammenfassen erhalten wir

$$\begin{aligned} F_{M,L}(a,b) = \mathrm{P}\left(M \le a, L \le b\right) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } a \le 0 \text{ oder } b \le 0 \\ a^3, & \text{wenn } a \in [0,1] \text{ und } b \ge 1 \\ a^3, & \text{wenn } 0 \le a \le b \le 1 \\ 1-(1-b)^3, & \text{wenn } a \ge 1 \text{ und } b \in [0,1] \\ b^3 + 3ab(a-b), & \text{wenn } 0 \le b \le a \le 1 \\ 1, & \text{wenn } a \ge 1 \text{ und } b \ge 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } a \le 0 \text{ oder } b \le 0 \\ a^3, & \text{wenn } a \in [0,1] \text{ und } a \le b \\ 1-(1-b)^3, & \text{wenn } a \ge 1 \text{ und } b \in [0,1] \\ b^3 + 3ab(a-b), & \text{wenn } 0 \le b \le a \le 1 \\ 1, & \text{wenn } a \ge 1 \text{ und } b \ge 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).