ETH Zürich, Frühling 2024
Dozent: Prof. Dr. Vincent Tassion   Übungsorganisator: Jakob Heiss

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 8

Lösung Version 2 (6. Mai 2024: Aufgabe 8.1(a) kann schneller mit einem Symmetrie-Argument gelöst werden.) Lösung Version 1 (2. Mai: basierend auf Serie Version 2 (29. April: Hinweise in Aufgabe 8.4 ergänzt.), Version 1 (25. April))
Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum.
Bitte stell sicher, dass du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **30. April** öffnen kannst.
Freiwillige Abgabe bis **02. Mai 8:00**. Nachher kann selbstständig mit dieser Lösung verglichen werden.

Aufgabe 8.1 [Korrelation & Unabhängigkeit]
Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y ist aus der Vorlesung bekannt, dass

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0,$$

d.h. die Zufallsvariablen sind unkorreliert. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen nicht gilt.

(a) Sei $X \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi])$. Zeige, dass $Y := \cos(X)$ und $Z := \sin(X)$ unkorreliert sind, d.h.

$$\mathrm{Cov}(Y, Z) = 0.$$

(b) Zeige, dass Y und Z nicht unabhängig sind.

Lösung 8.1

(a) Wir zeigen zuerst, dass Y und Z unkorreliert sind. Nach Definition der Kovarianz ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y, Z) &= \mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}[Y]\,\mathbb{E}[Z] \\ &= \mathbb{E}[\cos(X)\sin(X)] - \mathbb{E}[\cos(X)]\,\mathbb{E}[\sin(X)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)dx - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)dx\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\sin(x)dx,\end{aligned}$$

und wir sehen, dass die Funktion $\cos(x)\sin(x)$ ungerade ist und das Integral einer ungeraden Funktion über ein um 0 symmetrisches Intervall ist 0.
Alternativ: Mit partieller Integration erhalten wir

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\sin(x)dx = \left[\sin^2(x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)\cos(x)dx = -\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)\cos(x)dx.$$

Also ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\sin(x)dx = 0$$

Alternative 2: Aus $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ folgt, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\sin(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)dx = -\frac{1}{4}\left[\cos(2x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$

wegen $\cos(2\pi) = \cos(-2\pi) = 1$.
Somit erhalten wir

$$\mathrm{Cov}(Y, Z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\sin(x)dx = 0.$$

(b) Wir zeigen nun, dass Y und Z nicht unabhängig sind. Wegen

$$Y^2 + Z^2 = \cos^2(X) + \sin^2(X) = 1$$

ist

$$0 \leq P[Y^2 < 1/2, Z^2 < 1/2] \leq P[Y^2 + Z^2 < 1] = 0.$$

Jedoch ist

$$\begin{aligned}
P[Y^2 < 1/2] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1_{\{\cos^2(y)<1/2\}} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1_{\{-1/\sqrt{2}<\cos(y)<1/\sqrt{2}\}} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1_{\{\pi/4<y<3\pi/4\}\sqcup\{-3\pi/4<y<-\pi/4\}} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{-\pi}{4} - \frac{-3\pi}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$P[Z^2 < 1/2] = \frac{1}{2}.$$

Angenommen Y und Z sind unabhängig. Dann sind auch Y^2 und Z^2 unabhängig. Wegen

$$P[Y^2 < 1/2, Z^2 < 1/2] = 0 \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P[Y^2 < 1/2]P[Z^2 < 1/2]$$

ist dies jedoch ein Widerspruch. Somit sind Y und Z nicht unabhängig.
Also sind Y und Z unkorreliert, aber nicht unabhängig.

Aufgabe 8.2 [Gesetz der grossen Zahlen I: Empirische Verteilungsfunktion]
Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Die empirische Verteilungsfunktion $F_n : \mathbb{R} \times \Omega \to [0,1]$ ist gegeben durch

$$F_n(t, \omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i(\omega) \leq t}.$$

Der Wert $F_n(t, \omega)$ beschreibt also die relative Häufigkeit der $X_i(\omega)$ mit Werten $\leq t$ unter den ersten n. Damit ist $F_n(t) := F_n(t, \cdot)$ selbst eine Zufallsvariable für jedes $t \in \mathbb{R}$.

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig und $Y_i := \mathbb{1}_{X_i \leq t}$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $Y_1, Y_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen ist. Was ist $\mathbb{E}[Y_1]$?

(b) Zeige, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ die empirische Verteilungsfunktion $F_n(t)$ fast sicher gegen $F(t)$ konvergiert für $n \to \infty$.

Lösung 8.2

(a) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ kann die Zufallsvariable Y_i nur die Werte 1 und 0 annehmen. Insbesondere ist

$$\mathrm{P}(Y_i = 0) = \mathrm{P}(X_i > t) = \mathrm{P}(X_1 > t)$$

und

$$\mathrm{P}(Y_i = 1) = \mathrm{P}(X_i \leq t) = \mathrm{P}(X_1 \leq t),$$

da $X_1, X_2, \ldots$ identisch verteilt sind. Also ist auch die Folge $Y_1, Y_2, \ldots$ identisch verteilt und es gilt

$$\mathbb{E}[Y_1] = 0 \cdot \mathrm{P}(Y_i = 0) + 1 \cdot \mathrm{P}(Y_i = 1) = \mathrm{P}(X_1 \leq t) = F(t),$$

wobei F die Verteilungsfunktion von X_1 bezeichnet. Die Unabhängigkeit folgt aus der Grouping Eigenschaft (Satz 2.7 aus dem Skript) oder kann direkt mithilfe der Definition 2.5 aus dem Skript gezeigt werden.

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig und seien $Y_1, Y_2, \dots$ wie in der vorherigen Teilaufgabe definiert. Wir wissen, dass $Y_1, Y_2, \dots$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen ist. Mit dem Gesetz der grossen Zahlen (Theorem in Notizen 10 (Seite 5)) folgt, dass

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \le t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_1] = F(t) \quad \text{fast sicher.}$$

Aufgabe 8.3 We define[1] the *variance* of a random variable X as

$$\mathbb{V}(X) := \begin{cases} \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2, & \mathbb{E}[|X|] < \infty, \\ \infty, & \text{else.} \end{cases}$$

(a) Suppose that X is a random variable. Show that $\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$ if and only if $\mathbb{V}(X) < \infty$.

(b) Suppose that $\mathbb{V}(X) < \infty$. Show that $\mathbb{E}[X]$ minimizes the function

$$a \mapsto E[(X-a)^2] \quad (a \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

(c) Appreciate the fact that the median $F_X^{-1}(0.5)$ of X minimizes the function

$$a \mapsto \mathbb{E}[|X-a|] \quad (a \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

If you want you can prove (c), but the proof is rather technical, long (and maybe boring). A proof will be provided in the solution next week.

Lösung 8.3

(a) If $\mathbb{V}(X) < \infty$, then by definition we must have that $\mathbb{E}[X]$ is finite. Using the formula

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$$

we get that

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}[X]^2 < \infty.$$

Suppose now $\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$. By the Cauchy-Schwarz inequality (or solution of problem 6.4(b) or Jensen's inequality), $\mathbb{E}[|X|]^2 \le \mathbb{E}\left[|X|^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$.
Now, this implies that $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ and $\mathbb{E}[X]$ are well-defined, and therefore

$$\mathbb{V}(X) = E\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 < \infty.$$

(b) Let $\mu = E[X]$:

$$\begin{aligned} E[(X-a)^2] &= E[(X-\mu+\mu-a)^2] \\ &= E[(X-\mu)^2 + 2(X-\mu)(\mu-a) + (\mu-a)^2] \\ &= \mathbb{V}(X) + (\mu-a)^2. \end{aligned}$$

Thus

$$E[(X-a)^2] \ge \mathbb{V}(X)$$

with equality if and only if $a = \mu$.

(c) Let $m := F_X^{-1}(0.5)$ be the median. We use a similar technique as in the solution of (b) again, by splitting $X - a = X - m + m - a$. Because of the absolute value involved in eq. (2), we need to do a case analysis with respect to all the signs that appear.

[1] In (a) we will show that this definition of the variance coincides with the definition of the variance in Notes 9 for every $X \in L^2$ and is ∞ for every $X \notin L^2$.

case 1) $a \le m$: In order to separate $\mathbb{E}[|X-m|]$ from all the other terms we need to split Ω in different regions depending on the corresponding signs, because of the absolute value. In this way, we get

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X-a|] &= \mathbb{E}[|X-m+m-a|] \\
&= \mathbb{E}\left[(|X-m|-|m-a|)\mathbb{1}_{\{X\le a\}}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[(|m-a|-|X-m|)\mathbb{1}_{\{a<X<m\}}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[|X-m|+|m-a|)\mathbb{1}_{\{m\le X\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|X-m|\mathbb{1}_{\{X\le a\}}\right] - |m-a|\mathrm{P}(\{X\le a\}) \\
&\quad + \mathbb{E}\left[|X-m|\mathbb{1}_{\{a<X<m\}}\right] + \mathbb{E}\left[(|m-a|-2|X-m|)\mathbb{1}_{\{a<X<m\}}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[|X-m|\mathbb{1}_{\{m\le X\}}\right] + |m-a|\mathrm{P}(\{m\le X\}) \\
&= \mathbb{E}[|X-m|] \\
&\quad + |m-a|\left(\mathrm{P}(\{m\le X\}) - \mathrm{P}(\{X\le a\})\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left[(|m-a|-2|X-m|)\mathbb{1}_{\{a<X<m\}}\right] \\
&\ge \mathbb{E}[|X-m|] \\
&\quad + |m-a|\left(\mathrm{P}(\{m\le X\}) - \mathrm{P}(\{X\le a\})\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left[(|m-a|-2|m-a|)\mathbb{1}_{\{a<X<m\}}\right] \\
&= E[|X-m|] + |m-a|\left(\mathrm{P}(\{m\le X\}) - \mathrm{P}(\{X\le a\}) - \mathrm{P}(\{a<X<m\})\right) \\
&= E[|X-m|] + |m-a|\left(\mathrm{P}(\{m\le X\}) - \mathrm{P}(\{X<m\})\right).
\end{aligned}$$

The term $(\mathrm{P}(\{m\le X\}) - \mathrm{P}(\{X<m\}))$ is non-negative, since m is the median. Hence, the median m is a (not necessarily unique) minimizer over all $a \in (-\infty, m]$.

case 2) $a > m$: Analogously, we obtain

$$\mathbb{E}[|X-a|] \ge E[|X-m|] + |m-a|\left(\mathrm{P}(\{m\ge X\}) - \mathrm{P}(\{X>m\})\right).$$

Analogously, the term $(\mathrm{P}(\{m\ge X\}) - \mathrm{P}(\{X>m\}))$ is non-negative, since m is the median. Hence, the median m is a (not necessarily unique) minimizer over all $a \in [m, \infty)$.

So, we can conclude that the median m is a (not necessarily unique) minimizer of (2).

Aufgabe 8.4 [Markow & Chebychev Ungleichung]
Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Wir definieren die Mehrheitsfunktion

$$\begin{aligned}
\mathrm{MAJ}_n \colon \{0,1\}^n &\to \{0,1\} \\
(x_1,\dots,x_n) &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i < \frac{n}{2}, \\ 1, & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i > \frac{n}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Sei $(X_i)_{i\ge1}$ eine Folge von unabhängigen, Ber(p)-verteilten Zufallsvariablen mit Parameter $p \in [0,1]$. Definiere

$$Y_n := \mathrm{MAJ}_n(X_1,\dots,X_n).$$

(a) Berechne $\mathrm{P}(Y_n = 1)$, $\mathbb{E}[Y_n]$ und $\mathbb{V}(Y_n)$ für $p = 1/2$.

(b) Zeige, dass für alle $p \in [0,1]$,

$$\mathbb{E}[Y_n] \le 2p \quad \text{und} \quad \mathbb{V}(Y_n) \le \frac{1}{4}.$$

Hinweis: Nutze die Markow Ungleichung aus Notizen 8 (Seite 27), um $\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i > \frac{n}{2}\right)$ *abzuschätzen.*

(c) Zeige, dass

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathrm{P}(Y_n = 1) \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0, & \text{falls } p < 1/2, \\ 1, & \text{falls } p > 1/2. \end{cases}$$

Hinweis: Nutze die Chebychev[2] *Ungleichung aus Notizen 9 (Seite 9).*

(d) Schlussfolgere aus (c), dass $\mathbb{V}(Y_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für $p \neq 1/2$.

Lösung 8.4

(a) Für $p = 1/2$ erhalten wir

$$\mathrm{P}(Y_n = 1) = \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{n}{2}\right] \overset{\text{[Symmetrie]}}{=} \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{n}{2}\right] = \mathrm{P}(Y_n = 0),$$

da die ZVen $(1-X_i)_{i=1}^n$ ebenfalls unabhängig und Ber$(1/2)$-verteilt sind. Daraus folgt $\mathrm{P}(Y_n = 1) = 1/2$ und somit auch

$$\mathbb{E}[Y_n] = 1 \cdot \mathrm{P}(Y_n = 1) + 0 \cdot \mathrm{P}(Y_n = 0) = 1/2.$$

Da Y_n Werte in $\{0,1\}$ annimmt, gilt insbesondere $(Y_n)^2 = Y_n$ und somit folgt

$$\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{E}\left[(Y_n)^2\right] - \mathbb{E}[Y_n]^2 = \mathbb{E}[Y_n](1 - \mathbb{E}[Y_n]) = 1/4.$$

(b) In Aufgabenteil (a) haben wir gezeigt, dass

$$\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{E}[Y_n](1 - \mathbb{E}[Y_n]).$$

Da die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x(1-x)$ ihr Maximum an der Stelle $x = 1/2$ annimmt (mit $g(1/2) = 1/4$) und $\mathbb{E}[Y_n] \in [0,1]$ gilt, da $Y_n \in \{0,1\}$, erhalten wir

$$\mathbb{V}(Y_n) \leq 1/4$$

für alle $p \in [0,1]$. Weiterhin gilt

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathrm{P}(Y_n = 1) = \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{n}{2}\right] \overset{\text{[Markov]}}{\leq} \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]}{n/2},$$

wobei wir die Markov Ungleichung aus Notizen 8 (Seite 27) für die nicht-negative Zufallsvariable $\sum_{i=1}^n X_i$ mit $a = n/2$ angewendet haben. Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts erhalten wir

$$\mathbb{E}[Y_n] \leq \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]}{n/2} = \frac{np}{n/2} = 2p.$$

(c) Wir wollen die Chebychev Ungleichung aus Notizen 9 (Seite 9) anwenden, um

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathrm{P}(Y_n = 1) = \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{n}{2}\right]$$

für $p \neq 1/2$ anzuschätzen. Wir definieren $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ und stellen wie in Aufgabenteil (b) fest, dass

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = np.$$

Ausserdem gilt aufgrund der Unabhängigkeit

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = np(1-p).$$

[2] Für den Namen „Chebychev“ sind mehrere unterschiedliche Schreibweisen gebräuchlich: z.B. „Tschebyschow“, „Tschebyscheff“ oder „Tschebyschev“. Daher ist auch die Chebychev Ungleichung unter mehreren Schreibweisen bekannt.

Sei $p < 1/2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n] &= \mathrm{P}\left[S_n > \frac{n}{2}\right] = \mathrm{P}\left[S_n - np > \frac{n}{2} - np\right] \\ &\leq \mathrm{P}\left[|S_n - np| > n(1/2-p)\right] \overset{\text{[Chebychev]}}{\leq} \frac{\mathbb{V}(S_n)}{(n(1/2-p))^2} \\ &= \frac{np(1-p)}{(n(1/2-p))^2} = \frac{1}{n}\cdot\underbrace{\frac{p(1-p)}{(1/2-p)^2}}_{<\infty} \xrightarrow{n\to\infty} 0,\end{aligned}$$

wobei wir die Chebychev Ungleichung für die Zufallsvariable S_n mit $a = n(1/2-p)$ angewendet haben. Sei nun $p > 1/2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left[S_n < \frac{n}{2}\right] &= \mathrm{P}\left[np - S_n > np - \frac{n}{2}\right] \leq \mathrm{P}\left[|S_n - np| > n(p-1/2)\right] \\ &\overset{\text{[Chebychev]}}{\leq} \frac{\mathbb{V}(S_n)}{(n(p-1/2))^2} = \frac{1}{n}\cdot\underbrace{\frac{p(1-p)}{(p-1/2)^2}}_{<\infty} \xrightarrow{n\to\infty} 0,\end{aligned}$$

und somit folgt, dass

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathrm{P}\left[S_n > \frac{n}{2}\right] = 1 - \mathrm{P}\left[S_n < \frac{n}{2}\right] \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

(d) Wie in Aufgabenteil (a) stellen wir fest, dass für $p \in [0,1]$

$$\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{E}[Y_n](1 - \mathbb{E}[Y_n]).$$

Da für $p \neq 1/2$, $\mathbb{E}[Y_n]$ gegen 0 oder 1 konverigert für $n \to \infty$ (siehe Aufgabenteil (c)), folgt direkt, dass $\mathbb{V}(Y_n) \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 8.5 Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine unendliche Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei X_1 diskret ist mit

$$\mathbb{P}[X_1 = -1] = \mathbb{P}[X_1 = 0] = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X_1 = 1] = \frac{1}{2}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ betrachten wir die Partialsumme

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von S_n.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\big[S_n \geq n/2\big] \leq \mathbb{P}\big[|S_n - n/4| \geq n/4\big].$$

Schlussfolgern Sie, dass

$$\mathbb{P}[S_n \geq n/2] \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} S_n/n = 1/4\right].$$

Lösung 8.5

(a) Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts (Theorem 4.10 im Skript) und der identische Verteilung der $X_1, \ldots, X_n$ erhalten wir

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4} = \frac{n}{4}.$$

Mit Satz 4.25 im Skript (bzw. Notizen 9 (Seite 7)) erhalten wir aufgrund der Unabhängigkeit und der identischen Verteilung der $X_1, \ldots, X_n$

$$\sigma^2_{S_n} = \sigma^2_{X_1} + \ldots + \sigma^2_{X_n} = \frac{11}{16} + \ldots + \frac{11}{16} = \frac{11n}{16}.$$

(b) Wir stellen fest, dass

$$\{S_n - n/4 \geq n/4\} \subset \{|S_n - n/4| \geq n/4\}.$$

Somit folgt aus der Monotonie (Satz 1.8 im Skript), dass

$$\mathbb{P}[S_n \geq n/2] = \mathbb{P}[S_n - n/4 \geq n/4] \leq \mathbb{P}[|S_n - n/4| \geq n/4].$$

Da $\mathbb{E}[S_n] = n/4$ aus Teilaufgabe (a), können wir nun die Tschebyscheffsche Ungleichung (Notizen 9 (Seite 9) bzw. Satz 4.24 im Skript) mit $a = n/4$ verwenden und erhalten

$$\mathbb{P}[|S_n - n/4| \geq n/4] = \mathbb{P}[|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geq n/4] \leq \frac{\frac{11n}{16}}{\left(\frac{n}{4}\right)^2} = \frac{11}{n} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

(c) Da $\mathbb{E}[X_1] = 1/4$ folgt aus dem Gesetz der grossen Zahlen (GGZ, Notizen 10 (Seite 5) bzw. Theorem 6.1 im Skript), dass das Ereignis

$$\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{4}\right\}$$

fast sicher eintritt. Es gilt also $\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} S_n/n = 1/4\right] = 1$.

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).