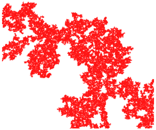
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik



Vincent Tassion
Koordinator: Jakob Heiss
TAs: Flavio Dalessi, Luana Jost, Laury Verhoeven

ETH zürich

Februar 20, 2024

Der Plan für Heute

Der Plan für Heute

1. **Einführung in die Wahrscheinlichkeit**

Der Plan für Heute

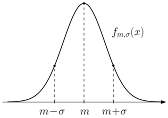
1. **Einführung in die Wahrscheinlichkeit**

2. **Administrative und praktische Organisation des Kurses**

Der Plan für Heute

1. **Einführung in die Wahrscheinlichkeit**
2. **Administrative und praktische Organisation des Kurses**
3. **Perkolationstheorie**

1. Einführung in die Wahrscheinlichkeit



Ein aktives Gebiet der Mathematik

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein aktives Gebiet der Mathematik mit vielen offenen Problemen.

Ein aktives Gebiet der Mathematik

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein aktives Gebiet der Mathematik mit vielen offenen Problemen.

Fields-Medaillengewinner:

2006 Wendelin Werner

2010 Stanislav Smirnov

2014 Martin Hairer

2022 Hugo Duminil-Copin

Ein aktives Gebiet der Mathematik

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein aktives Gebiet der Mathematik mit vielen offenen Problemen.

Fields-Medaillengewinner:

2006 Wendelin Werner

2010 Stanislav Smirnov

2014 Martin Hairer

2022 Hugo Duminil-Copin

Ein wichtiges offenes Problem der Wahrscheinlichkeitstheorie: Das kritische Verhalten der 3d-Perkolation.

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

➜ **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

- **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...
- **Unklarheit ausdrücken:** Wenn eine Maschine etwas ausrechnet, ist das Ergebnis selten exakt. Man kann die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzen, um die Unsicherheit zu beschreiben.

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

- **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...
- **Unklarheit ausdrücken:** Wenn eine Maschine etwas ausrechnet, ist das Ergebnis selten exakt. Man kann die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzen, um die Unsicherheit zu beschreiben.
- **Informationstheorie:** Die Wahrscheinlichkeitstheorie kann eine Situation beschreiben, in der man nicht alle Informationen besitzt.

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

- **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...
- **Unklarheit ausdrücken:** Wenn eine Maschine etwas ausrechnet, ist das Ergebnis selten exakt. Man kann die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzen, um die Unsicherheit zu beschreiben.
- **Informationstheorie:** Die Wahrscheinlichkeitstheorie kann eine Situation beschreiben, in der man nicht alle Informationen besitzt.
- **Randomisierte Algorithmen** in Informatik: Manchmal sind Algorithmen effizienter, wenn man zufällige Entscheidungen erlaubt. Zum Beispiel: Google web search, Ameisen suchen Nahrung.

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

- **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...
- **Unklarheit ausdrücken:** Wenn eine Maschine etwas ausrechnet, ist das Ergebnis selten exakt. Man kann die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzen, um die Unsicherheit zu beschreiben.
- **Informationstheorie:** Die Wahrscheinlichkeitstheorie kann eine Situation beschreiben, in der man nicht alle Informationen besitzt.
- **Randomisierte Algorithmen** in Informatik: Manchmal sind Algorithmen effizienter, wenn man zufällige Entscheidungen erlaubt. Zum Beispiel: Google web search, Ameisen suchen Nahrung.
- **Vereinfachung von komplexen Systemen**. Beispiele: Wassermoleküle in einem Glas, oder Autos auf der Autobahn.

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

- ➜ **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...
- ➜ **Unklarheit ausdrücken:** Wenn eine Maschine etwas ausrechnet, ist das Ergebnis selten exakt. Man kann die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzen, um die Unsicherheit zu beschreiben.
- ➜ **Informationstheorie:** Die Wahrscheinlichkeitstheorie kann eine Situation beschreiben, in der man nicht alle Informationen besitzt.
- ➜ **Randomisierte Algorithmen** in Informatik: Manchmal sind Algorithmen effizienter, wenn man zufällige Entscheidungen erlaubt. Zum Beispiel: Google web search, Ameisen suchen Nahrung.
- ➜ **Vereinfachung von komplexen Systemen**. Beispiele: Wassermoleküle in einem Glas, oder Autos auf der Autobahn.
- ➜ **Risikotheorie:** Wahrscheinlichkeitstheorie hilft eine rationale Einscheidung zu treffen, wenn man nicht alle Elemente planen kann. Zum Beispiel hilft der SLF Lawinenbericht den Skifahrern, die Lawinengefahr richtig einzuschätzen.

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

- **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...
- **Unklarheit ausdrücken:** Wenn eine Maschine etwas ausrechnet, ist das Ergebnis selten exakt. Man kann die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzen, um die Unsicherheit zu beschreiben.
- **Informationstheorie:** Die Wahrscheinlichkeitstheorie kann eine Situation beschreiben, in der man nicht alle Informationen besitzt.
- **Randomisierte Algorithmen** in Informatik: Manchmal sind Algorithmen effizienter, wenn man zufällige Entscheidungen erlaubt. Zum Beispiel: Google web search, Ameisen suchen Nahrung.
- **Vereinfachung von komplexen Systemen**. Beispiele: Wassermoleküle in einem Glas, oder Autos auf der Autobahn.
- **Risikotheorie:** Wahrscheinlichkeitstheorie hilft eine rationale Einscheidung zu treffen, wenn man nicht alle Elemente planen kann. Zum Beispiel hilft der SLF Lawinenbericht den Skifahrern, die Lawinengefahr richtig einzuschätzen.
- ...

Anwendungen in der Mathematik

Anwendungen in der Mathematik

- **Analysis** Approximationssatz von Stone-Weierstrass.

  Jede stetige Funktion kann gleichmäßig auf einem kompakten Intervall durch Polynome approximiert werden.

Anwendungen in der Mathematik

- **Analysis** Approximationssatz von Stone-Weierstrass.

  Jede stetige Funktion kann gleichmäßig auf einem kompakten Intervall durch Polynome approximiert werden.

- **Algebra** Perron-Froebenius Theorem und Markov-Kette.

  Die Eigenwerte bestimmter Matrizen stehen im Zusammenhang mit dem Langzeitverhalten einiger Zufallsprozesse.

Anwendungen in der Mathematik

- **Analysis** Approximationssatz von Stone-Weierstrass.

  Jede stetige Funktion kann gleichmäßig auf einem kompakten Intervall durch Polynome approximiert werden.

- **Algebra** Perron-Froebenius Theorem und Markov-Kette.

  Die Eigenwerte bestimmter Matrizen stehen im Zusammenhang mit dem Langzeitverhalten einiger Zufallsprozesse.

- **Kombinatorik** Die probabilistische Methode.

Anwendungen in der Mathematik

- **Analysis** Approximationssatz von Stone-Weierstrass.

  Jede stetige Funktion kann gleichmäßig auf einem kompakten Intervall durch Polynome approximiert werden.

- **Algebra** Perron-Froebenius Theorem und Markov-Kette.

  Die Eigenwerte bestimmter Matrizen stehen im Zusammenhang mit dem Langzeitverhalten einiger Zufallsprozesse.

- **Kombinatorik** Die probabilistische Methode.

- **Zahlentheorie** Zufälliges Verhalten von Primzahlen.

Ziele dieses Kurses

Ziele dieses Kurses

1. **Entwicklung der Wahrscheinlichkeitssprache:**

   Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, Zufallsvariablen, Masstheorie

   Wir werfen einen Würfel. Das Ergebnis ist eine *Zufallszahl* zwischen 1 und 6: Wie kann man diese *Zufallszahl* mathematisch beschreiben?

Ziele dieses Kurses

1. **Entwicklung der Wahrscheinlichkeitssprache:**

   Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, Zufallsvariablen, Masstheorie

   Wir werfen einen Würfel. Das Ergebnis ist eine *Zufallszahl* zwischen 1 und 6:
   Wie kann man diese *Zufallszahl* mathematisch beschreiben?

2. **Unabhängigkeit**

   Neues Konzept, das nicht im Masstheorie Kurs präsent war.

   Wir werfen zwei Würfel. Die Ergebnisse haben nichts miteinander zu tun.
   Wie ist diese Unabhängigkeit zu beschreiben?

Ziele dieses Kurses

1. **Entwicklung der Wahrscheinlichkeitssprache:**

   Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, Zufallsvariablen, Masstheorie

   Wir werfen einen Würfel. Das Ergebnis ist eine *Zufallszahl* zwischen 1 und 6: Wie kann man diese *Zufallszahl* mathematisch beschreiben?

2. **Unabhängigkeit**

   Neues Konzept, das nicht im Masstheorie Kurs präsent war.

   Wir werfen zwei Würfel. Die Ergebnisse haben nichts miteinander zu tun. Wie ist diese Unabhängigkeit zu beschreiben?

3. **Erwartungswert**

   Eine fundamentale Eigenschaft von Zufallszahlen.

   Ein Freund schlägt ein Spiel vor: er wirft einen Würfel und das Ergebnis ist X. Ich gebe ihm 2 CHF falls $X = 5, 6$. Niemand gewinnt falls $X = 4$. Er gibt mir 1CHF falls $X = 1, 2, 3$. Soll ich mit ihm spielen?

Ziele dieses Kurses

1. **Entwicklung der Wahrscheinlichkeitssprache:**

   Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, Zufallsvariablen, Masstheorie

   Wir werfen einen Würfel. Das Ergebnis ist eine *Zufallszahl* zwischen 1 und 6: Wie kann man diese *Zufallszahl* mathematisch beschreiben?

2. **Unabhängigkeit**

   Neues Konzept, das nicht im Masstheorie Kurs präsent war.

   Wir werfen zwei Würfel. Die Ergebnisse haben nichts miteinander zu tun. Wie ist diese Unabhängigkeit zu beschreiben?

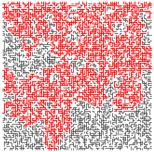
3. **Erwartungswert**

   Eine fundamentale Eigenschaft von Zufallszahlen.

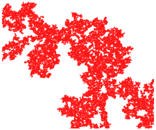
   Ein Freund schlägt ein Spiel vor: er wirft einen Würfel und das Ergebnis ist X. Ich gebe ihm 2 CHF falls $X = 5, 6$. Niemand gewinnt falls $X = 4$. Er gibt mir 1CHF falls $X = 1, 2, 3$. Soll ich mit ihm spielen?

4. **Grundlegende Resultate** Gesetz der grossen Zahlen, Zentraler Grenzwertsatz.

   Warum soll ich nicht Lotterie spielen?



3. Perkolationstheorie



Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Die Perkolationstheorie untersucht, wie sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium ausbreitet. zB:

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Die Perkolationstheorie untersucht, wie sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium ausbreitet. zB:

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

Die Perkolationstheorie untersucht, wie sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium ausbreitet. zB:

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

In beiden Fällen beobachten wir ein Phasenübergangsphänomen:

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

Wenn man einen Stein in Wasser taucht, hat es entweder wenige Löcher, und das Wasser bleibt an der Oberfläche des Steines

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

Oder der Stein ist porös genug und das Wasser kann sich durch den ganzen Stein ausbreiten.

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

Im zweiten Beispiel hat entweder der Wald wenig Bäume, und ein Feuer bleibt auf ein paar Bäume lokalisiert.

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

Oder der Wald ist dicht und ein Feuer breitet sich durch den ganzen Wald aus.

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

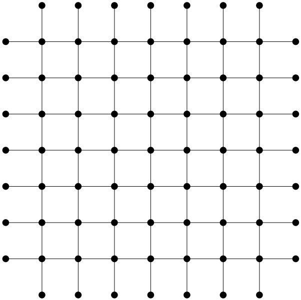
Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

Oder der Wald ist dicht und ein Feuer breitet sich durch den ganzen Wald aus.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]

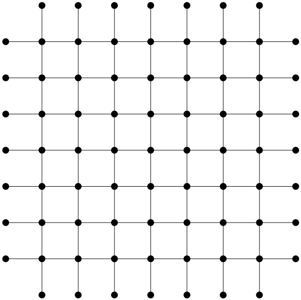
**Das bekannteste Perkolationsmodell für solche Phasenübergänge heisst Bernoulli-Perkolation.
Es wurde vor 60 Jahren von Broadbent und Hammersley eingeführt.**

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Um die Mathematische Definition dieses Modells zu geben, betrachten wir ein $2n \times 2n$ Quadrat.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



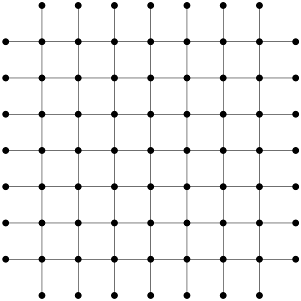
Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2.$

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}.$

.

Es ist der Graph mit der Knotenmenge $\{-n, \ldots, n\}^2$ und Kanten zwischen den Knoten im euklidischen Abstand 1 voneinander.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



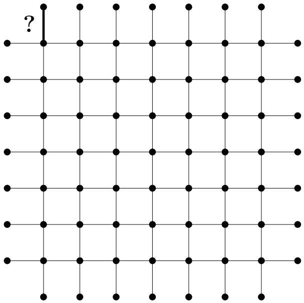
Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Wir betrachten auch einen Parameter p zwischen 0 und 1. Dieser Parameter stellt die Porosität des Steins dar.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

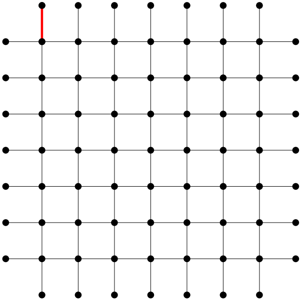
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Für jede Kante e werfen wir eine Münze: – die Kante e ist offen mit Wahrscheinlichkeit p.
– und geschlossen mit Wahrsch. $1-p$

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

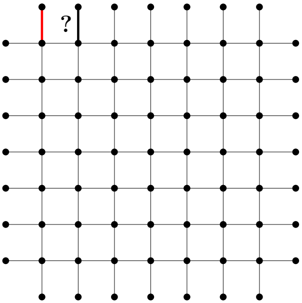
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Zum Beispiel ist diese erste Kante offen.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \dots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \dots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

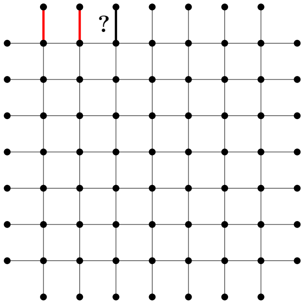
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Die zweite?

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \dots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \dots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

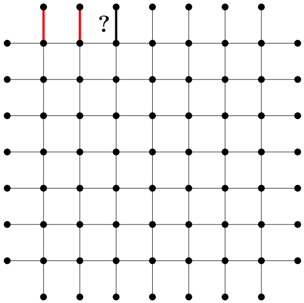
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Die zweite? Die zweite auch.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

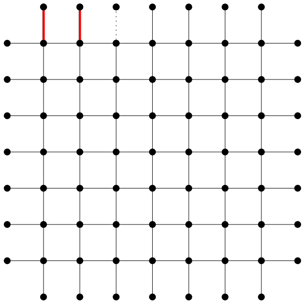
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Die dritte?

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

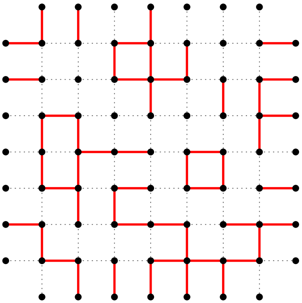
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Die dritte? Die dritte ist geschlossen . . . und so weiter.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

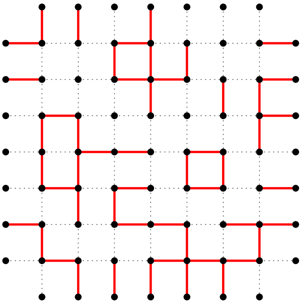
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Am Ende dieser Operation bekommen wir eine zufällige Konfiguration.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

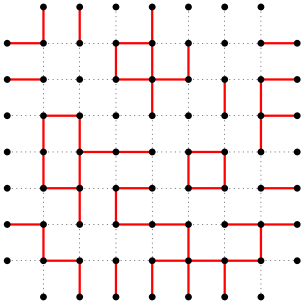
➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Perkolationsconfiguration:

$$\boxed{\omega = (\omega_e)_{e \in E} \in \{0,1\}^E \ .}$$

Mathematisch ist diese zufällige Konfiguration gegeben durch eine Familie $\omega = (\omega_e)$, für e in der Kantenmenge E. Mit anderen Worten: ω ist ein Element der Potenzmenge $\{0,1\}^E$.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \dots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \dots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

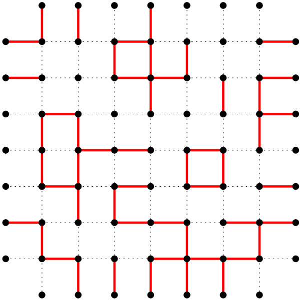
➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Perkolationsconfiguration:

$$\boxed{\omega = (\omega_e)_{e \in E} \in \{0,1\}^E \ .}$$

Eine Art zu denken über ω ist, es als einen zufälligen Untergraph von dem Quadrat zu betrachten.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

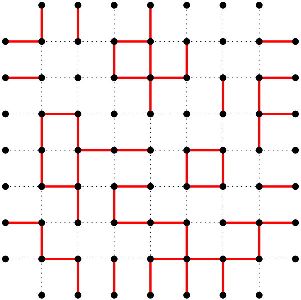
➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Perkolationsconfiguration:

$$\boxed{\omega = (\omega_e)_{e \in E} \in \{0,1\}^E \ .}$$

Die Terminologie offen/geschlossen kommt von der Interpretation von ω als poröses Material

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

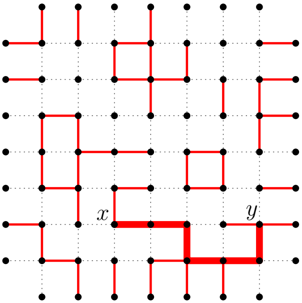
➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Perkolationsconfiguration:

$$\boxed{\omega = (\omega_e)_{e \in E} \in \{0,1\}^E \ .}$$

die Kanten stellen Poren dar: – Entweder ist eine Kante offen und Wasser kann durch sie fließen – Oder sie ist geschlossen und es fließt kein Wasser.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

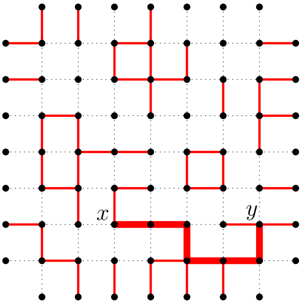
Perkolationsconfiguration:

$$\boxed{\omega = (\omega_e)_{e \in E} \in \{0, 1\}^E \ .}$$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Allgemeiner ist Ein Pfad offen, wenn alle Kanten dieses Pfades offen sind. Auf dem Bild sieht man zum Beispiel einen offenen Pfad von x nach y.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Perkolationsconfiguration:

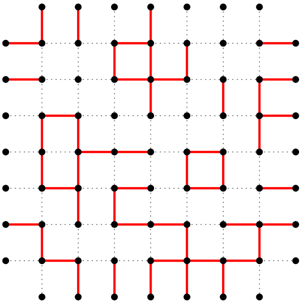
$$\boxed{\omega = (\omega_e)_{e \in E} \in \{0, 1\}^E \ .}$$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Cluster: Zusammenhangskomponenten von $(V, \{e \,:\, \omega_e = 1\})$.

Schließlich definieren wir die Cluster der Percolationskonfiguration.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Perkolationsconfiguration:

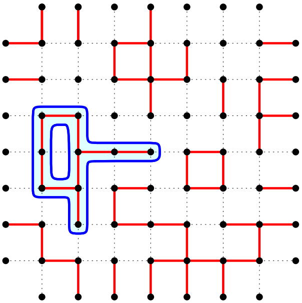
$$\boxed{\omega = (\omega_e)_{e \in E} \in \{0, 1\}^E \ .}$$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Cluster: Zusammenhangskomponenten von $(V, \{e : \omega_e = 1\})$.

Ein Cluster ist eine zusammenhängende Komponente des Graphen mit Knotenmenge $\{-n, \ldots, n\}^2$ und Kantenmenge "die Menge der offener Kante".

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Perkolationsconfiguration:

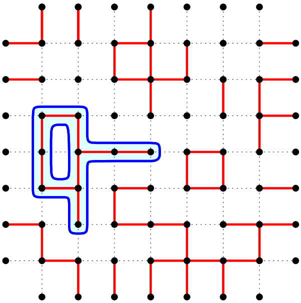
$$\boxed{\omega = (\omega_e)_{e \in E} \in \{0, 1\}^E \ .}$$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Cluster: Zusammenhangskomponenten von $(V, \{e : \omega_e = 1\})$.

Auf dem Bild sieht man zum Beispiel einen Cluster in blau.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Perkolationsconfiguration:

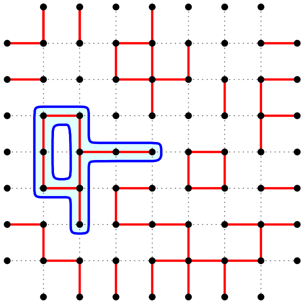
$$\boxed{\omega = (\omega_e)_{e \in E} \in \{0, 1\}^E \ .}$$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Cluster: Zusammenhangskomponenten von $(V, \{e : \omega_e = 1\})$.

Der Cluster eines Punkts x ist das ganze eingedrungene Gebiet, wenn man Wasser in x injiziert.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Perkolationsconfiguration:

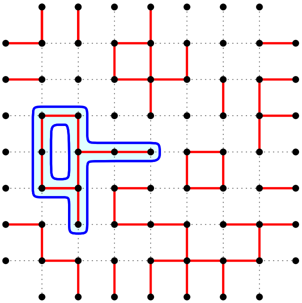
$$\boxed{\omega = (\omega_e)_{e \in E} \in \{0,1\}^E \ .}$$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Cluster: Zusammenhangskomponenten von $(V, \{e \,:\, \omega_e = 1\})$.

Ich möchte die Rolle von p betonen. Falls p klein ist, gibt es wenige Kanten. Falls p gross ist, gibt es viele Kanten.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{\omega_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{\omega_e = 0}$.

Perkolationsconfiguration:

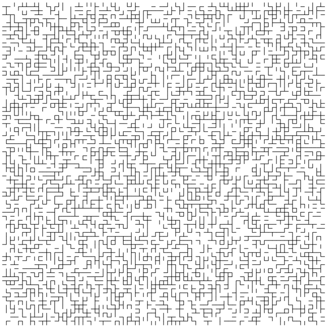
$$\boxed{\omega = (\omega_e)_{e \in E} \in \{0,1\}^E \ .}$$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Cluster: Zusammenhangskomponenten von $(V, \{e \,:\, \omega_e = 1\})$.

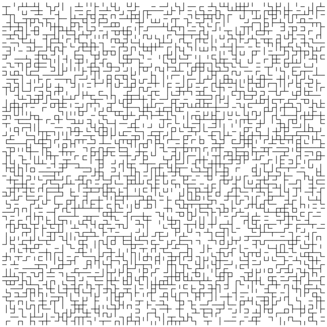
Ich möchte die Rolle von p betonen. Falls p klein ist, gibt es wenige Kanten. Falls p gross ist, gibt es viele Kanten.

Ein poröser Stein?



Wenn wir über Perkolation als ein poröses Material nachdenken, kommt natürlich die Frage: “Fließt Wasser von oben nach unten?”

Ein poröser Stein?



Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

Mathematisch bedeutet diese Frage: Existiert ein offener Pfad von Oben nach Unten?

Ein poröser Stein?

Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

Auf dieser Simulation färben wir alle Cluster rot, die die Oberseite des Quadrats berühren. Dann merken wir, dass kein offener Pfad existiert.

Ein poröser Stein?

Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

Eigentlich hängt die Antwort dieser Frage von p ab:

Ein poröser Stein?

Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

Erstens ist für p = 0 keine Kante offen und es gibt sicher keine offenen Pfade.

Ein poröser Stein?

Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

Für p=1 sind alle Kanten offen und offensichtlich existiert immer ein offener Pfad.

Ein poröser Stein?

Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

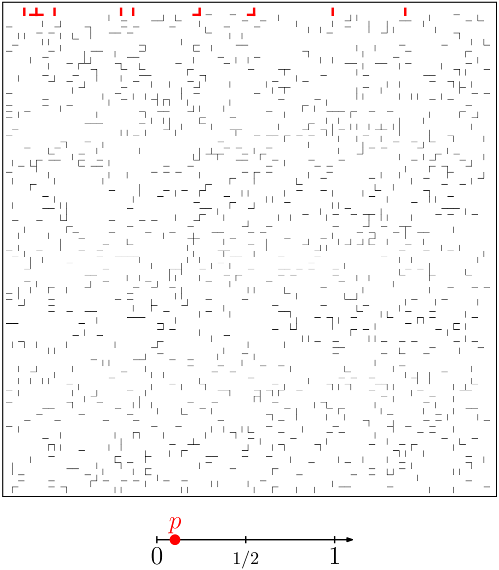
Jetzt schauen wir Simulationen in einer 100x100-Box an, wenn p von 0 bis 1 variiert.

Ein poröser Stein?

Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

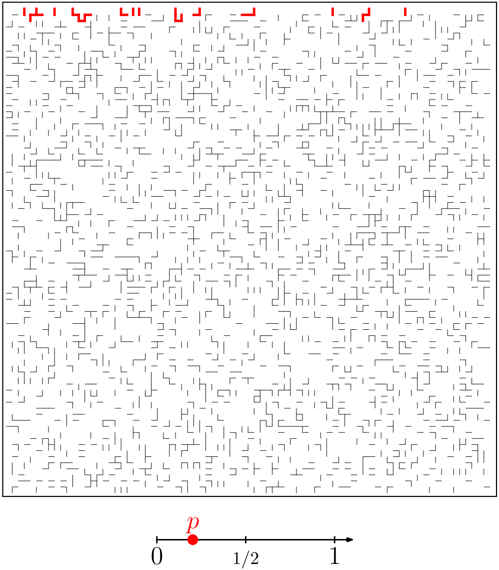
Jetzt schauen wir Simulationen in einer 100x100-Box an, wenn p von 0 bis 1 variiert.

Fließt Wasser von oben nach unten?



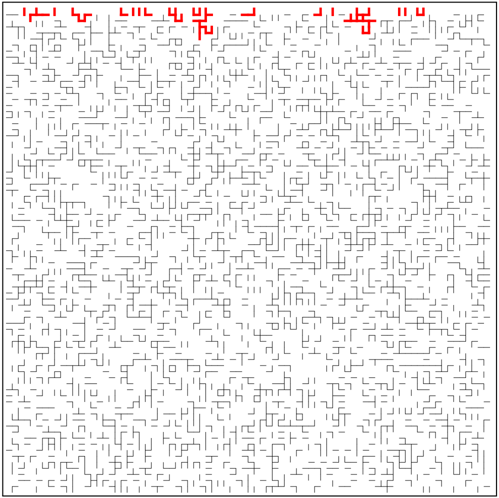
Falls p klein ist, gibt es sehr wenige offene Kanten. Man beobachtet keinen offenen Pfad von Oben nach Unten: das Wasser ist blockiert.

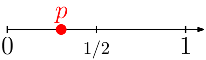
Fließt Wasser von oben nach unten?



Falls p größer wird, gibt es mehr und mehr offene Kanten. Aber so lange p kleiner als 1/2 bleibt, beobachten wir in Simulation nie einen offenen Pfad.

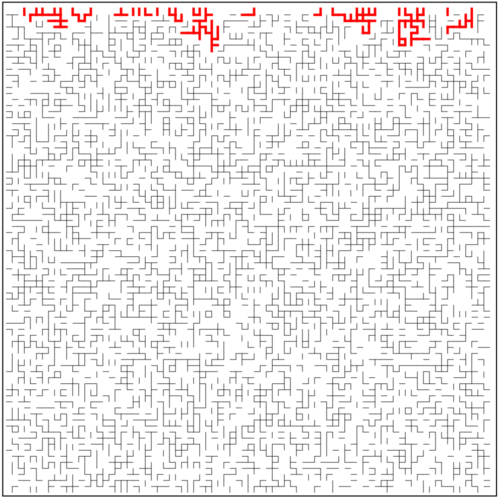
Fließt Wasser von oben nach unten?

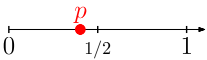




Falls p größer wird, gibt es mehr und mehr offene Kanten. Aber so lange p kleiner als 1/2 bleibt, beobachten wir in Simulation nie einen offenen Pfad.

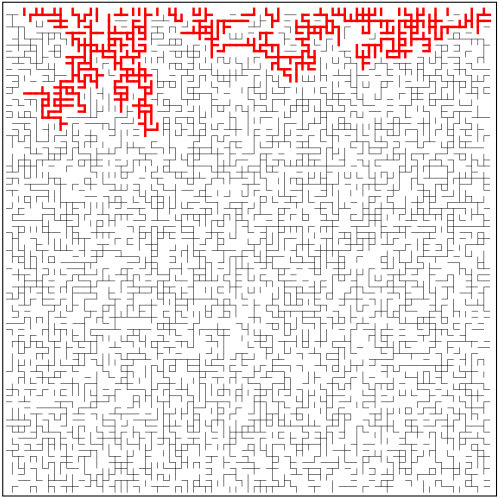
Fließt Wasser von oben nach unten?

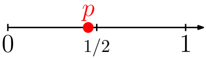




Falls p größer wird, gibt es mehr und mehr offene Kanten. Aber so lange p kleiner als 1/2 bleibt, beobachten wir in Simulation nie einen offenen Pfad.

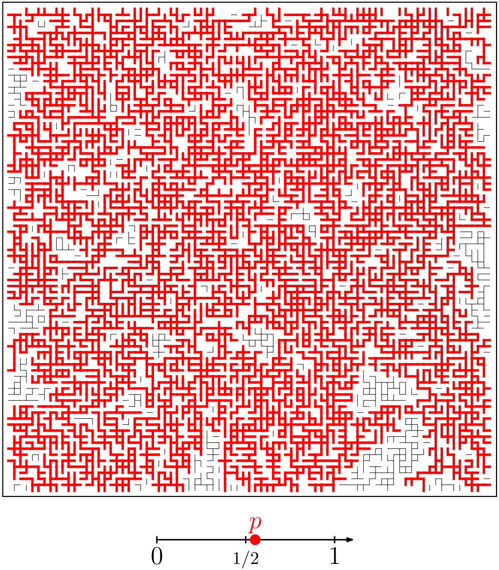
Fließt Wasser von oben nach unten?





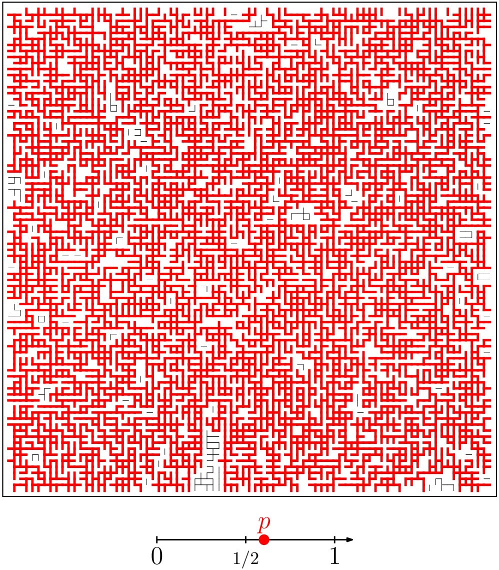
Falls p größer wird, gibt es mehr und mehr offene Kanten. Aber so lange p kleiner als 1/2 bleibt, beobachten wir in Simulation nie einen offenen Pfad.

Fließt Wasser von oben nach unten?



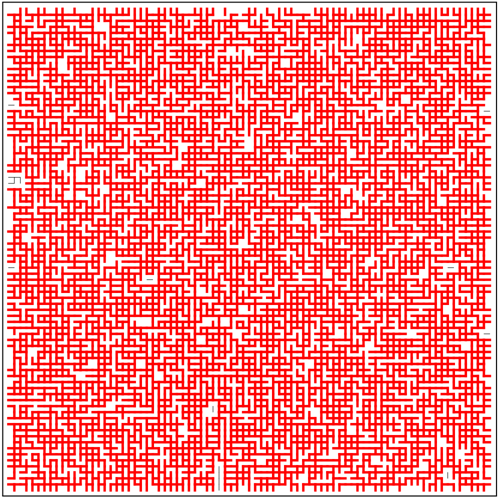
Im Gegenteil, sobald p größer als 1/2 wird, gibt es genug offene Kanten. Und wir beobachten immer einen offenen Pfad von oben nach unten.

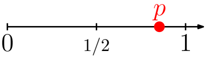
Fließt Wasser von oben nach unten?



Es wird mehr und mehr der Fall, wenn p grösser wird.

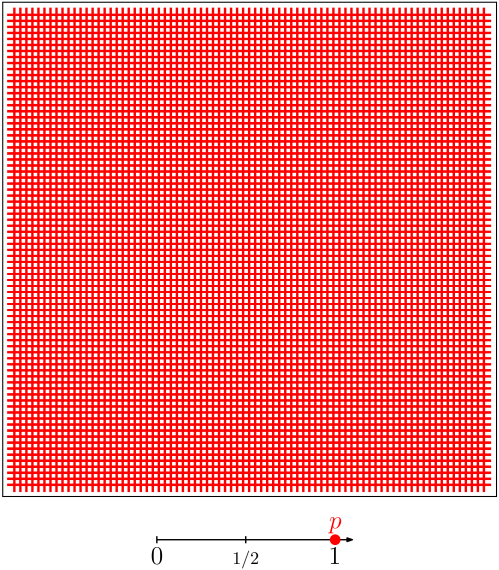
Fließt Wasser von oben nach unten?





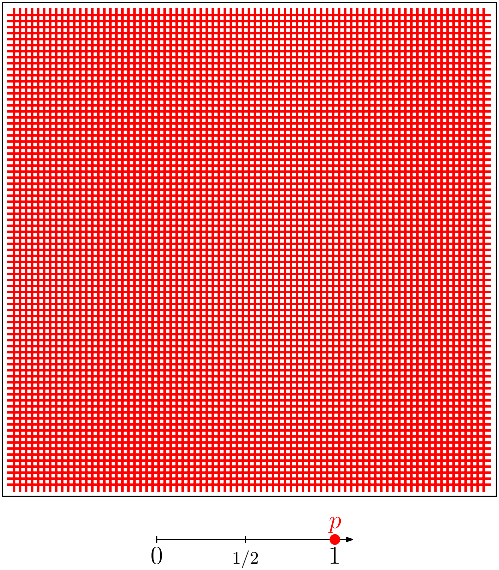
Es wird mehr und mehr der Fall, wenn p grösser wird.

Fließt Wasser von oben nach unten?



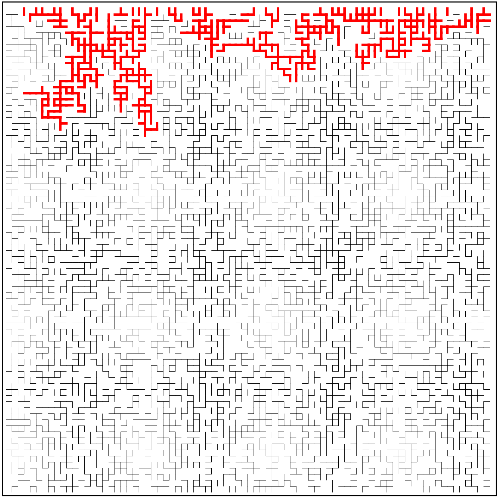
Und am Ende, für $p = 1$ sind alle die Kanten offen.

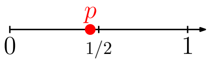
Fließt Wasser von oben nach unten?



Abschließend zeigen die Simulationen eine drastische Verhaltensänderung bei einem kritischen Wert p=1/2.

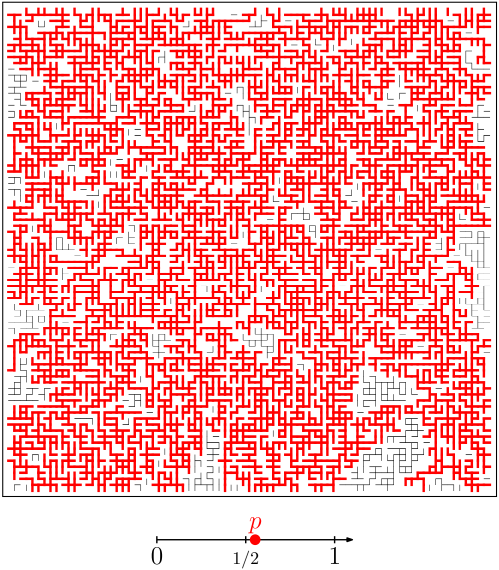
Fließt Wasser von oben nach unten?





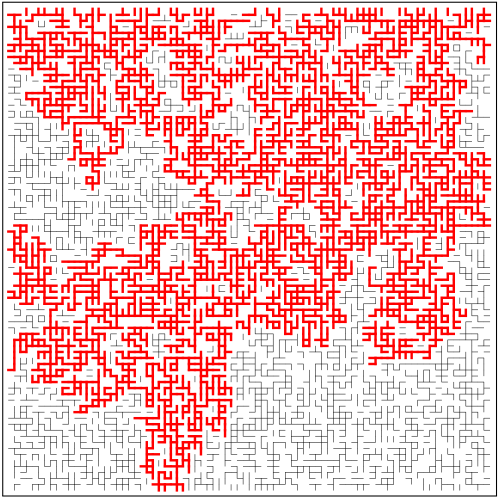
Falls p kleiner als 1/2 ist, gibt es keinen offenen Pfad von oben nach Unten.

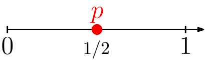
Fließt Wasser von oben nach unten?



Falls p größer als 1/2 ist, dann fließt das Wasser von oben nach unten.

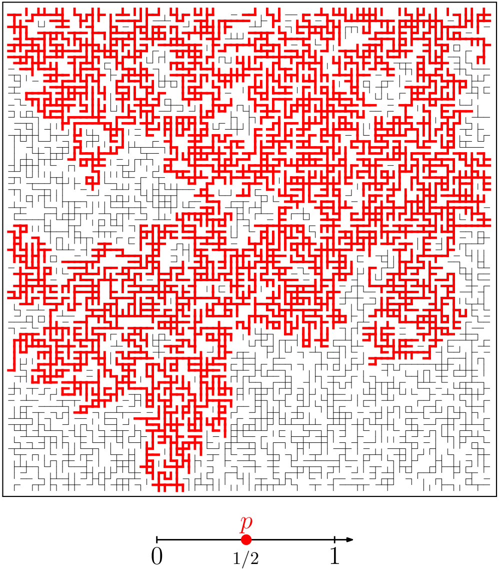
Fließt Wasser von oben nach unten?





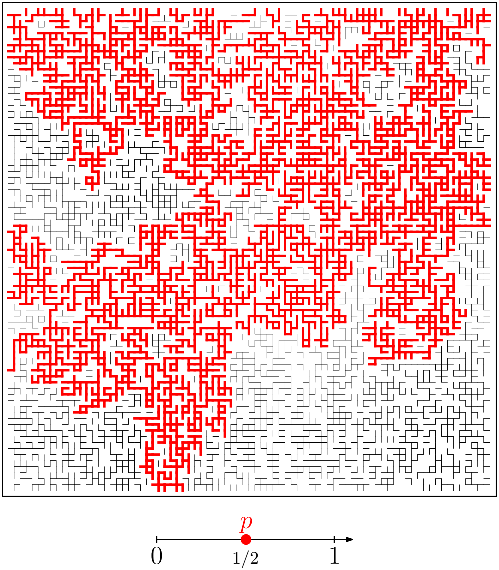
Falls p genau gleich 1/2 ist, haben die Clusters schöne fraktale Strukturen, und die Antwort der Frage ist nicht mehr so klar.

Fließt Wasser von oben nach unten?



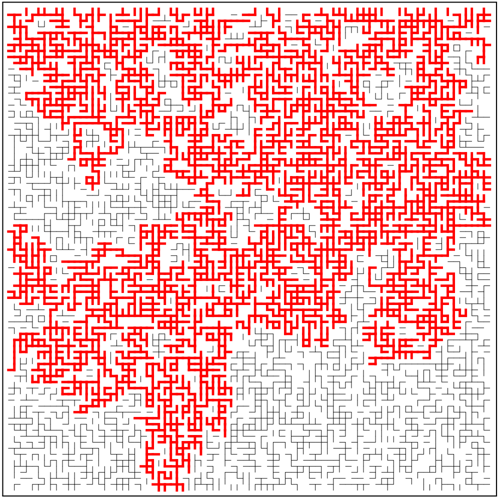
Hier gibt es einen offenen Pfad von oben nach unten, aber dieser ist sehr fragile.

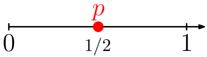
Fließt Wasser von oben nach unten?



Ein paar offene Kanten weg, und der Pfad ist auch weg!

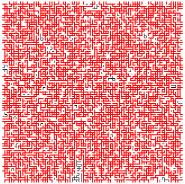
Fließt Wasser von oben nach unten?





Ein paar offene Kanten weg, und der Pfad ist auch weg!

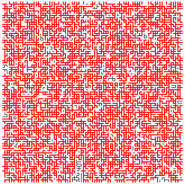
$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

Was wir bei den Simulationen beobachten, wurde 1980 von Kesten rigoros etabliert. Er hat den folgenden Satz bewiesen.

$p < \frac{1}{2}$



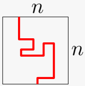
$p > \frac{1}{2}$

Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir

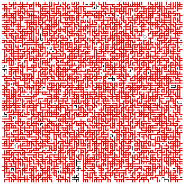
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Bigg[$$



$$\Bigg] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wir betrachten die Kreuzungswahrscheinlichkeit: das ist die Wahrscheinlichkeit, dass es einen offenen Pfad von oben nach unten in einer n-mal-n-Box existiert.

$p < \frac{1}{2}$



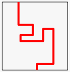
$p > \frac{1}{2}$

Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir

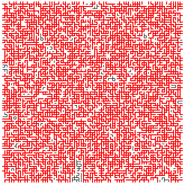
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\quad n \quad n \quad \right]$$



$$= \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Für p kleiner als $1/2$ konvergiert diese Kreuzungswahrscheinlichkeit gegen 0, wenn die Größe der Box n gegen unendlich geht.

$p < \frac{1}{2}$



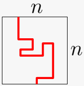
$p > \frac{1}{2}$

Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir

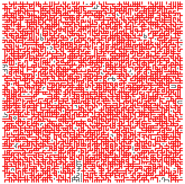
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\right.$$



$$\left.\right] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wir werden niemals einen offenen Pfad von oben nach unten beobachten, falls $p < 1/2$ und n groß ist.

$p < \frac{1}{2}$



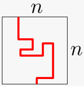
$p > \frac{1}{2}$

MATHEMATISCHE ANTWORT AUF FRAGE 1

Theorem [Kesten, 1980]

Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir

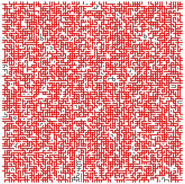
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Bigg[$$



$$\Bigg] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Für $p > 1/2$ konvergiert die Kreuzungswahrscheinlichkeit gegen 1, wenn die Größe der Box n gegen unendlich geht.

$p < \frac{1}{2}$



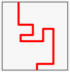
$p > \frac{1}{2}$

Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

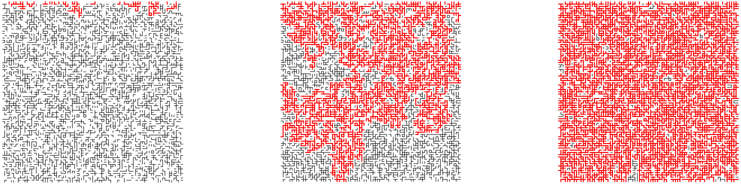
Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Bigg[$$



$$n \quad n \Bigg] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wir werden immer einen offenen Pfad von oben nach unten beobachten, wenn p>1/2 und n groß ist.



$p < \frac{1}{2}$ $\qquad$ $p = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $p > \frac{1}{2}$

Mathematische Antwort auf Frage 1

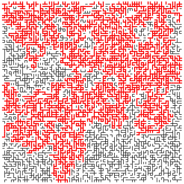
Theorem [Kesten, 1980]

Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir

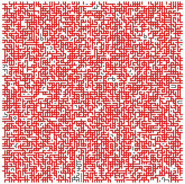
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\ \overset{n}{\square}\, n\ \right] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ ?? & \text{if } p = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Für p=1/2, erinnern Sie sich, sagte ich, die Antwort sei nicht klar.

$p < \frac{1}{2}$



$p = \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

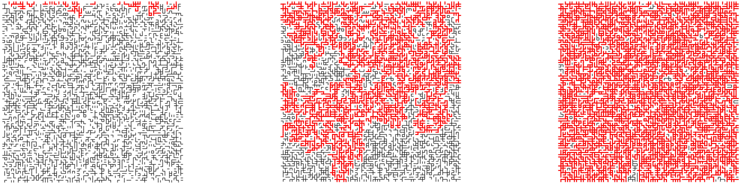
Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\quad n \times n \quad\right] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ ?? & \text{if } p = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Und die Antwort werden Sie haben am Donnerstag :-D



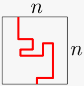
$p < \frac{1}{2}$ $\qquad$ $p = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $p > \frac{1}{2}$

Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir

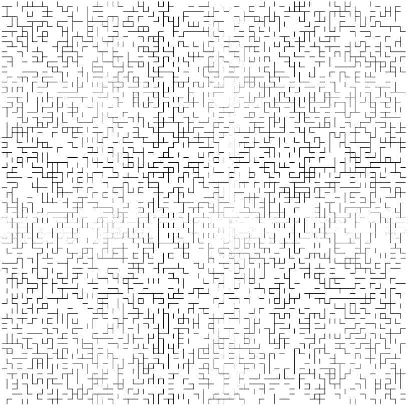
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Bigg[$$



$$\Bigg] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ ?? & \text{if } p = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

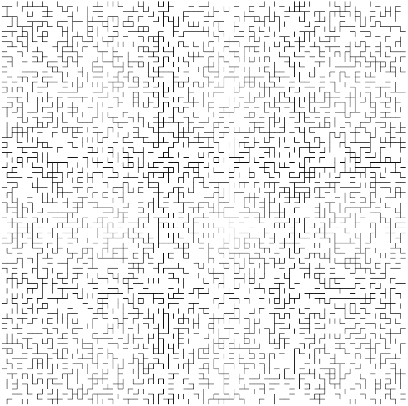
Und die Antwort werden Sie haben am Donnerstag :-D

Ein unendlicher Wald



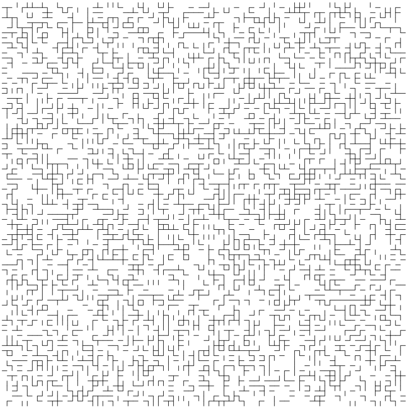
Für Bilder oder Simulationen können wir die Perkolation nur in einem endlichen Kasten darstellen.

Ein unendlicher Wald



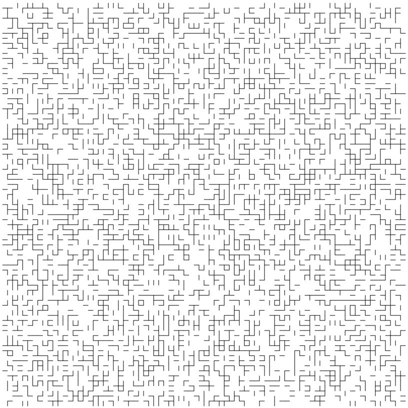
Mathematisch könnten wir uns aber auch eine Perkolation im unendlichen Gitter $\mathbb{Z}^2$ vorstellen.

Ein unendlicher Wald



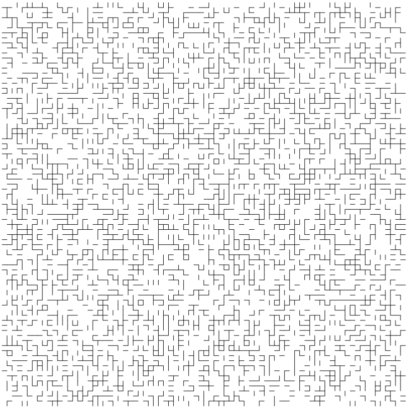
Stellen Sie sich vor, Sie haben einen unendlichen Wald von Bäumen,

Ein unendlicher Wald



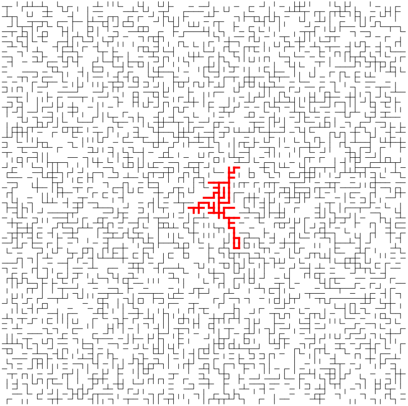
**und Sie setzen eine Kante zwischen zwei Bäume,
wenn sich ein Feuer von einem Baum zum anderen ausbreiten würde.**

Ein unendlicher Wald



In diesem Fall ist eine natürliche Frage:
Ist es möglich, dass ein Feuer einen unendlichen Teil des Waldes verbrennen würde?

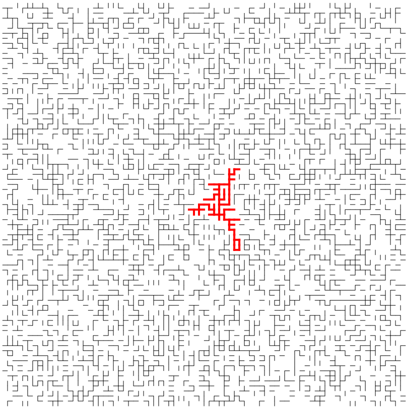
Ein unendlicher Wald



Existiert ein unendliches Cluster?

Mathematisch bedeutet diese Frage: Gibt es einen unendlichen Cluster?

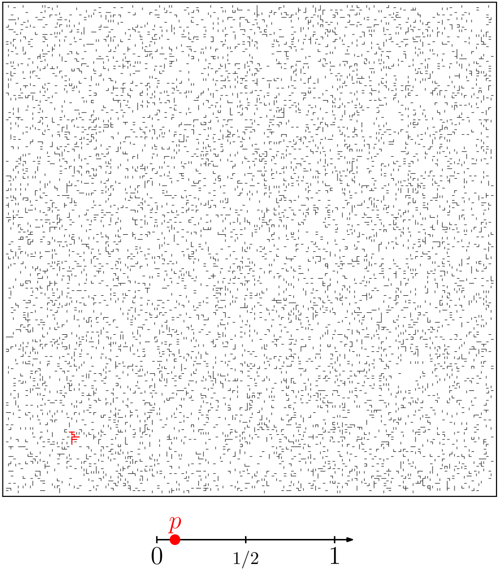
Ein unendlicher Wald



Existiert ein unendliches Cluster?

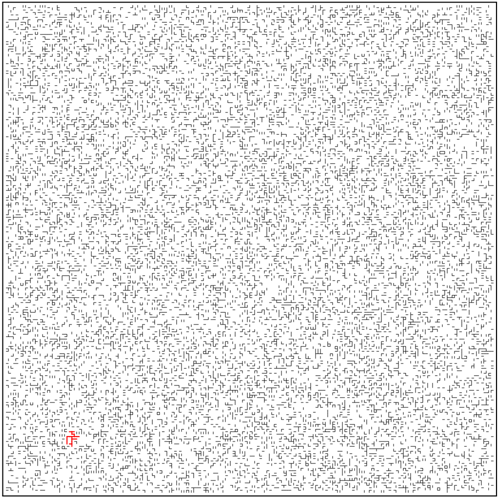
Mathematisch bedeutet diese Frage: Gibt es einen unendlichen Cluster?

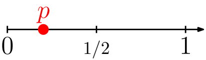
Größte Cluster in eine groß Box



Auch hier hängt die Antwort vom Parameter p ab. Betrachten wir nun den größten Cluster in einer 200-mal-200-Box.

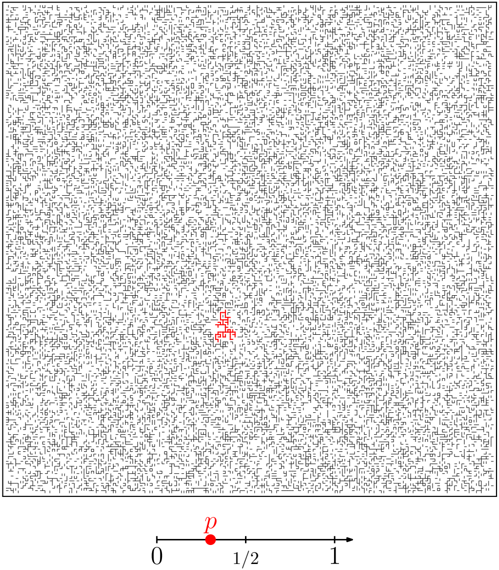
Größte Cluster in eine groß Box





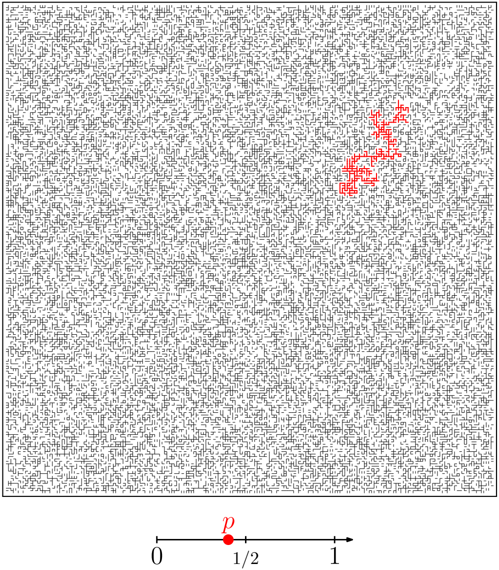
Für $p < 1/2$ sind alle Cluster ziemlich klein.

Größte Cluster in eine groß Box



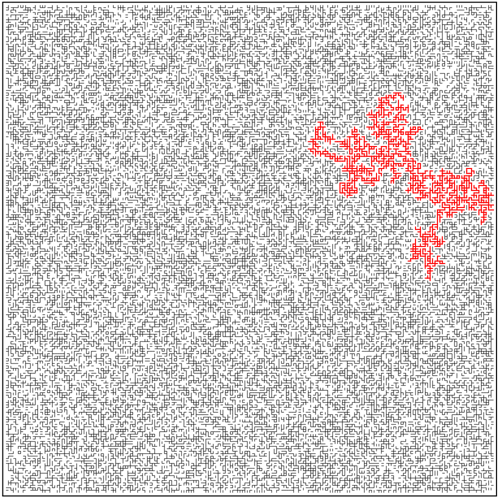
Für $p < 1/2$ sind alle Cluster ziemlich klein.

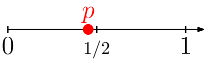
Größte Cluster in eine groß Box



Für $p < 1/2$ sind alle Cluster ziemlich klein.

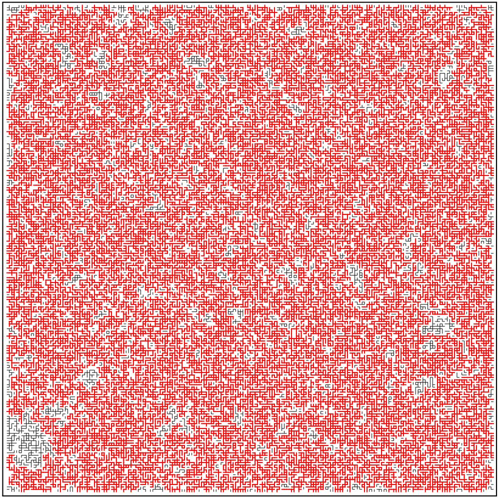
Größte Cluster in eine groß Box

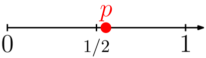




Für $p < 1/2$ sind alle Cluster ziemlich klein.

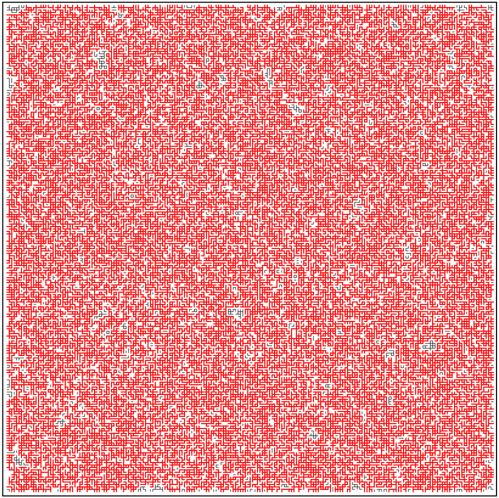
Größte Cluster in eine groß Box

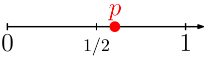




Sobald $p > 1/2$, dann sieht man einen riesigen Cluster. Und eigentlich ist dieser Cluster ein Teil von einem unendlichen Cluster.

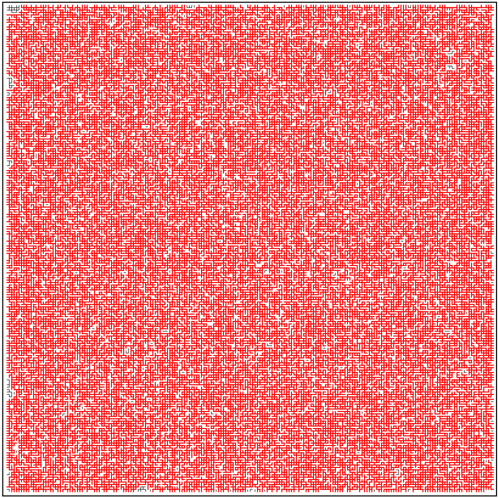
Größte Cluster in eine groß Box

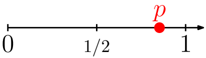




Sobald $p > 1/2$, dann sieht man einen riesigen Cluster. Und eigentlich ist dieser Cluster ein Teil von einem unendlichen Cluster.

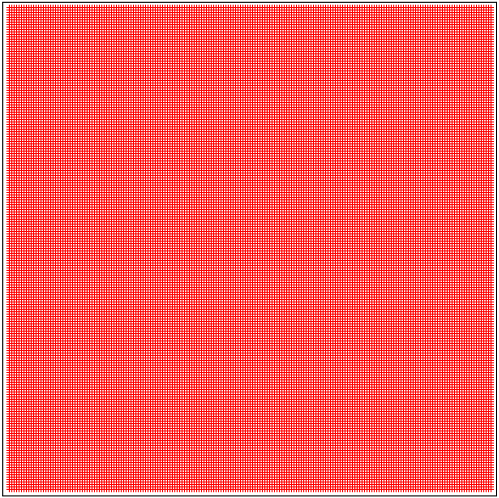
Größte Cluster in eine groß Box

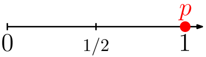




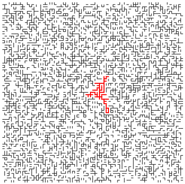
Sobald $p > 1/2$, dann sieht man einen riesigen Cluster. Und eigentlich ist dieser Cluster ein Teil von einem unendlichen Cluster.

Größte Cluster in eine groß Box

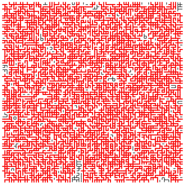




Sobald $p > 1/2$, dann sieht man einen riesigen Cluster. Und eigentlich ist dieser Cluster ein Teil von einem unendlichen Cluster.

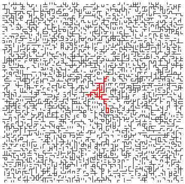


$p < \frac{1}{2}$

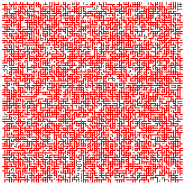


$p > \frac{1}{2}$

Die Mathematische Antwort wurde auch von Kesten gegen. Er hat den folgenden Satz bewiesen.



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

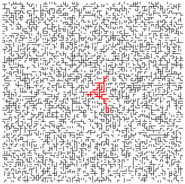
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

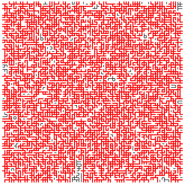
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es einen unendlichen Cluster gibt, ist gleich 0 falls $p < 1/2$,



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

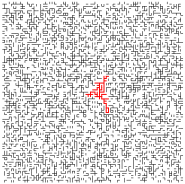
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

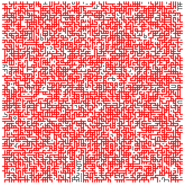
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

und 1 falls $p > 1/2$.



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

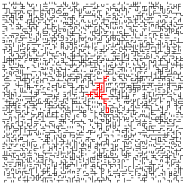
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

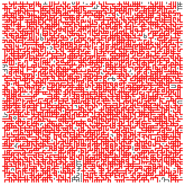
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

Hier möchte ich etwas betonen: Wir betrachten das Ereignis, dass es einen unendlichen Cluster gibt.



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

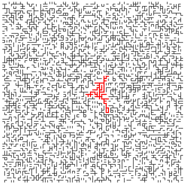
MATHEMATISCHE ANTWORT AUF FRAGE 2

Theorem [Kesten, 1980]

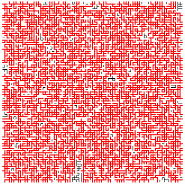
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

Dieses Ereignis ist nicht trivial: Es gibt viele mögliche Konfigurationen mit einem unendlichen Cluster und viele Konfigurationen ohne einen unendlichen Cluster.



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

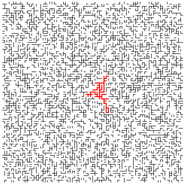
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

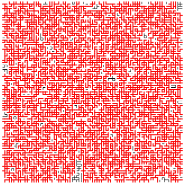
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert \textit{nie}]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert \textit{immer}]} \end{cases}$$

Trotzdem ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses entweder 0 (für p kleiner als 1/2) oder 1 (für p größer als 1/2).



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

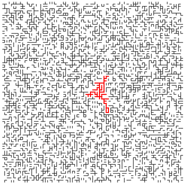
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

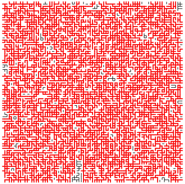
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, & \textbf{[Existiert \textit{nie}]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. & \textbf{[Existert \textit{immer}]} \end{cases}$$

Ein solches Phänomen ist nur möglich, weil der Graph jetzt unendlich ist.



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

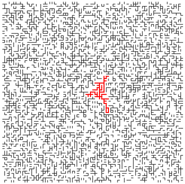
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

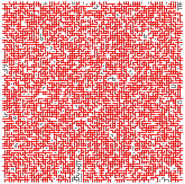
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

Es illustriert eine wichtige Idee in der Wahrscheinlichkeitstheorie:



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

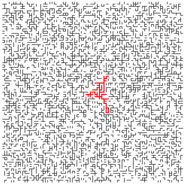
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

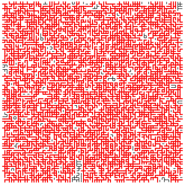
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, & \textbf{[Existiert \textit{nie}]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. & \textbf{[Existert \textit{immer}]} \end{cases}$$

Ein Element ist zufällig, aber wenn wir viele Elemente beobachten, ist das Ergebnis nicht mehr zufällig.



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

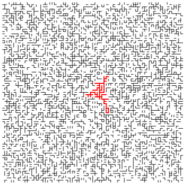
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

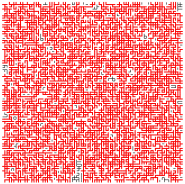
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert \textit{nie}]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert \textit{immer}]} \end{cases}$$

Dieser Satz sagt nicht, was am p=1/2 passiert. Und die Frage ist:



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

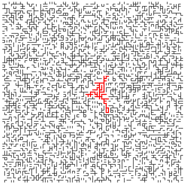
MATHEMATISCHE ANTWORT AUF FRAGE 2

Theorem [Kesten, 1980]

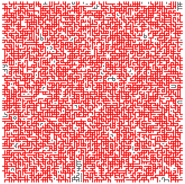
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster oder nicht?



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

MATHEMATISCHE ANTWORT AUF FRAGE 2

Theorem [Kesten, 1980]

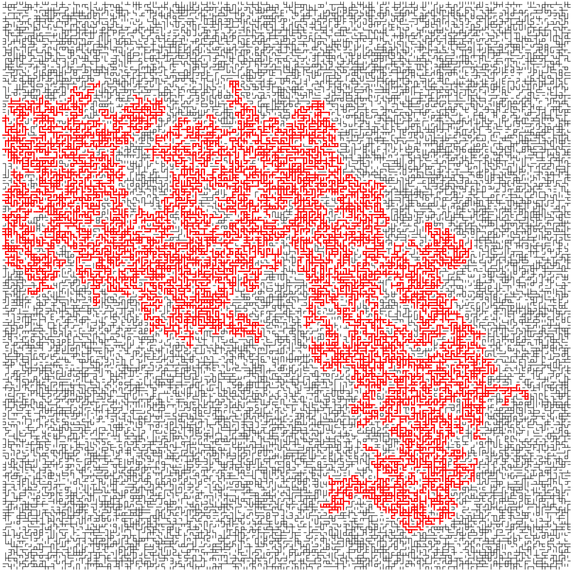
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster oder nicht?

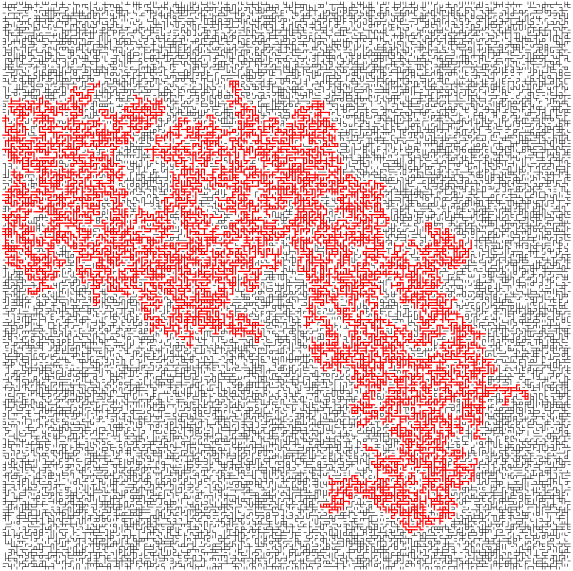
Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?



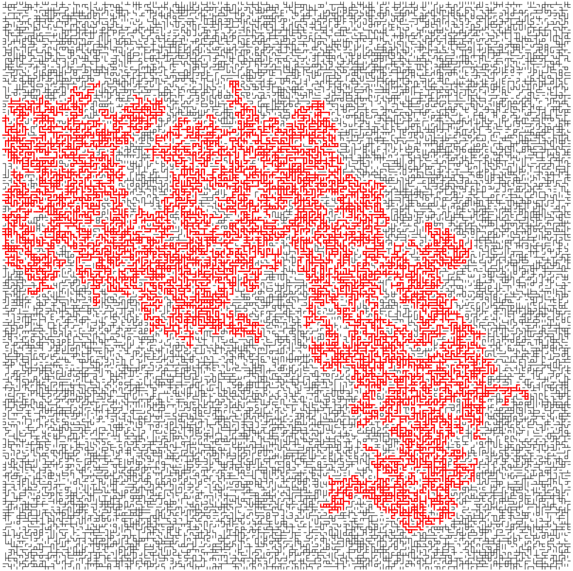
Diese Simulation zeigt den grössten CLuster in einer 200x200 Box.

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?



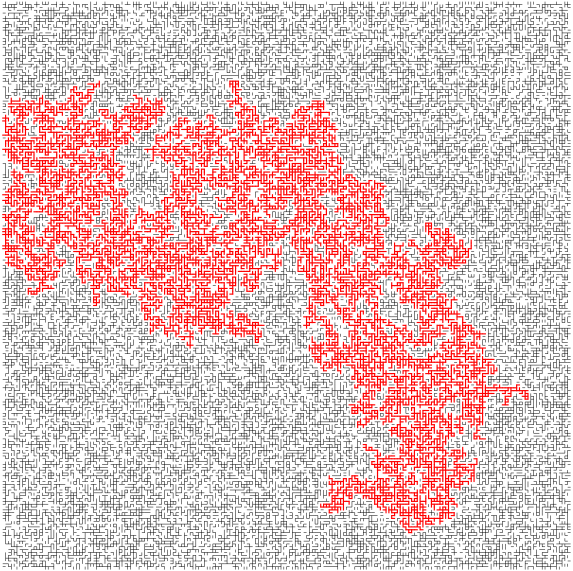
Ist es ein Teil von einem unendlichen oder einem endlichen Cluster in $\mathbb{Z}^2$.

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?



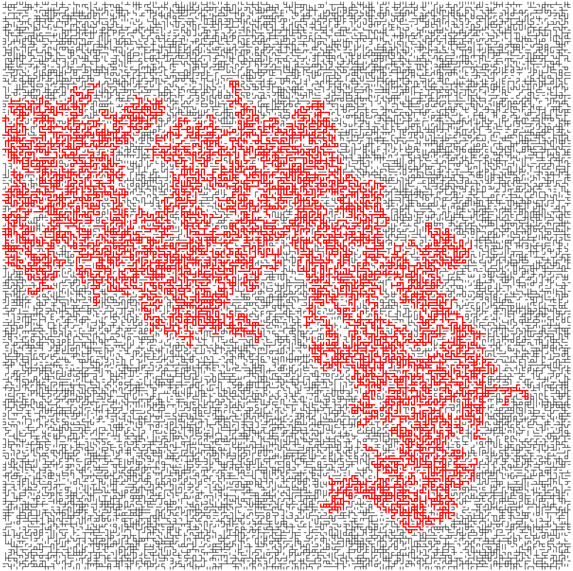
Die Antwort ist im Harris-Kesten Theorem gegeben: alle Clusters sind endlich...

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?



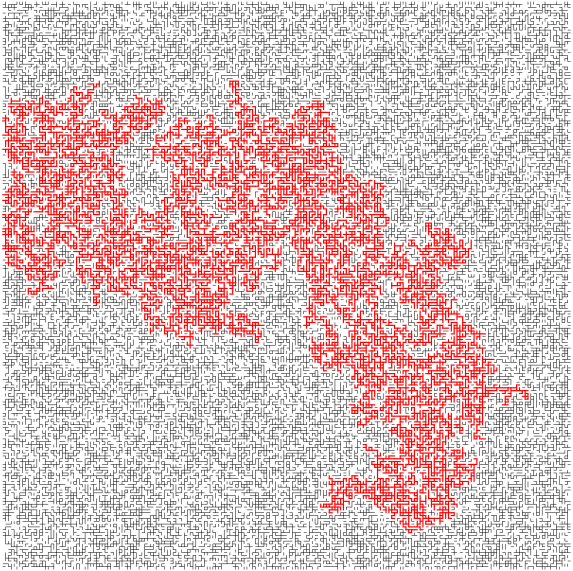
Aber die Antwort dieser Frage ist in Dimension 3 nicht bekannt.

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?



Das ist heute die grösste Herausforderung in Perkolationstheorie!!

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?



Das ist heute die grösste Herausforderung in Perkolationstheorie!!