Lernkontrolle

Aufgabe I

Betrachten Sie eine beliebige 3×3 Matrix A und das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Hat A eine Nullzeile, so besitzt $Ax = 0$ keine Lösung.

(a) Wahr

(b) Falsch

2. Ist eine Spalte von A das Vielfache einer anderen Spalte, dann besitzt $Ax = 0$ genau eine Lösung.

(a) Wahr

(b) Falsch

3. Sind zwei Spalten der Matrix A gleich, so gilt $\mathrm{Rang}(A) < 3$.

(a) Wahr

(b) Falsch

4. Ist eine Zeile von A das Vielfache einer anderen Zeile, so gilt $\mathrm{Rang}(A) < 3$.

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe II

Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem $Bx = c$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & b^2 \\ 0 & b-2 & 3 \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b(b-3) \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

5. Für $b = 3$ gilt $\mathrm{Rang}(B) = 3$.

(a) Wahr

(b) Falsch

6. Für $b = 2$ gilt $\text{Rang}(B) = 1$.

(a) Wahr

(b) Falsch

7. Für $b = 1$ besitzt $Bx = c$ unendlich viele Lösungen.

(a) Wahr

(b) Falsch

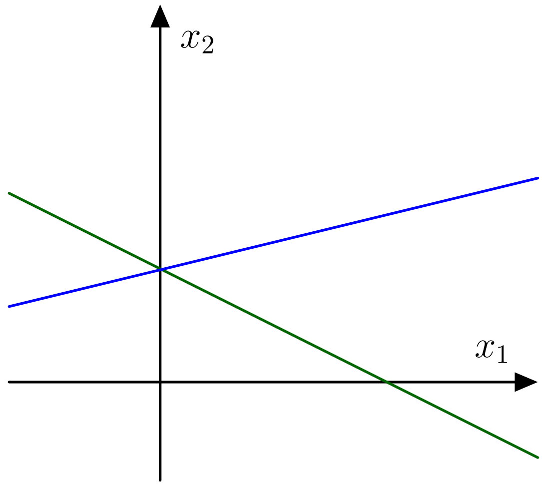
8. Für $b = 0$ besitzt $Bx = c$ eine eindeutige Lösung.

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe III

In der folgenden Grafik wird ein lineares Gleichungssystem $Ax = c$ veranschaulicht, wobei A eine 2×2 Matrix ist.



Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

9. Für die Matrix A gilt $\text{Rang}(A) = 2$.

(a) Wahr

(b) Falsch

10. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

passt zu der Abbildung von $Ax = c$ oben.

(a) Wahr

(b) Falsch

11. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

passt zu der Abbildung von $Ax = c$ oben.

(a) Wahr

(b) Falsch

12. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

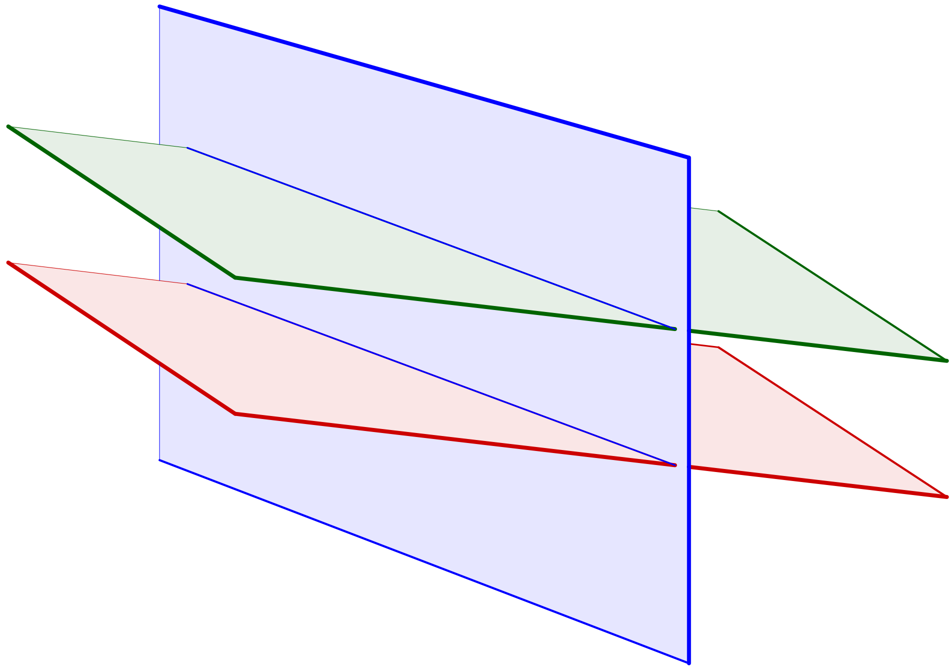
passt zu der Abbildung von $Ax = c$ oben.

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe IV

In der folgenden Grafik ist ein lineares Gleichungssystem $Bx = c$ veranschaulicht, wobei B eine 3×3 Matrix ist.



Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

13. Der Vektor c ist der Nullvektor.

(a) Wahr

(b) Falsch

14. Für die Matrix B gilt Rang $(B) = 2$.

(a) Wahr

(b) Falsch

15. Das lineare Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen.

(a) Wahr

(b) Falsch

16. Die Matrix B enthält eine Nullzeile.

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe V

Betrachten Sie beliebige $n \times n$ Matrizen E, F, G und H. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

17. Es gilt $(EGF)^3 = E^3G^3F^3$.

(a) Wahr

(b) Falsch

18. Es gilt $H(G+F) + 2E = 2E + HF + HG$.

(a) Wahr

(b) Falsch

19. Es gilt $(H-G)^2 = H^2 - 2HG + G^2$.

(a) Wahr

(b) Falsch

20. Ist F eine Diagonalmatrix, so gilt $GF = FG$.

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe VI

Es sei A eine beliebige 5×5 Matrix und

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & a & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

21. Für $a = 2, b = 2$ und $c = 0$ gilt immer $AB = BA$.

(a) Wahr

(b) Falsch

22. Für $a = 3, b = 1$ und $c = 0$ gilt immer $AB = BA$.

(a) Wahr

(b) Falsch

23. Für $a = 0, b = 2$ und $c = 2$ gilt immer $AB = BA$.

(a) Wahr

(b) Falsch

24. Für $a = 0, b = 1$ und $c = 3$ gilt immer $AB = BA$.

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe VII

Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

für eine reelle Zahl $a > 0$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

25. Es gilt $\det(B) \neq 0$.

(a) Wahr

(b) Falsch

26. Die Determinante von B ist unabhängig vom Wert von a.

(a) Wahr

(b) Falsch

27. Das lineare Gleichungssystem $Bx = 0$ besitzt genau eine Lösung.

(a) Wahr

(b) Falsch

28. Es gilt $\det(-B) = \det(B)$.

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe VIII

Betrachten Sie die beiden reellen Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } a \times b \neq 0,$$

sowie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

29. Für die Determinante von M gilt $\det(M) \neq 0$.

(a) Wahr

(b) Falsch

30. Das homogene lineare Gleichungssystem $Mx = 0$ besitzt genau eine Lösung.

(a) Wahr

(b) Falsch

31. Die Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms in der x_1x_2-Ebene ist ungleich Null.

(a) Wahr

(b) Falsch

32. Es existiert eine reelle Zahl λ, so dass $a = \lambda b$.

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe IX

Betrachten Sie die folgende Menge von Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^3$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

33. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ kann als Linearkombination von Vektoren aus der Menge E dargestellt werden.

(a) Wahr

(b) Falsch

34. Jeder beliebige Vektor in $\mathbb{R}^3$ kann als Linearkombination von Vektoren aus der Menge E dargestellt werden.

(a) Wahr

(b) Falsch

35. Die Menge E ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Wahr

(b) Falsch

36. Die Menge E enthält eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe X

Betrachten Sie die folgende Menge von Polynomen im Vektorraum $\mathcal{P}_3$

$$F = \left\{t^3, t^2 - t, t^2 - 1, t^3 - t^2 + t\right\}$$

sowie den von der Menge F aufgespannten Unterraum U von $\mathcal{P}_3$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

37. Das Polynom $2t^3 - t^2 + 2t - 1$ liegt in U.

(a) Wahr

(b) Falsch

38. $\dim(U) = 2$.

(a) Wahr

(b) Falsch

39. F ist eine Basis von U.

(a) Wahr

(b) Falsch

40. $U = \mathcal{P}_3$.

(a) Wahr

(b) Falsch