

# Lineare Algebra I

## Bonusaufgabe 1

### Aufgabe 1

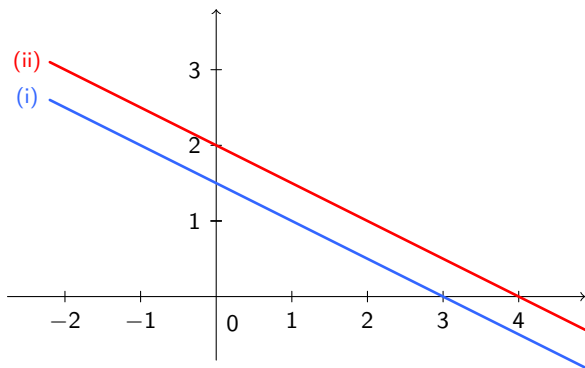
Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme. Denken Sie für jedes dieser Systeme über den Informationsgehalt der einzelnen Gleichungen nach: Entscheiden Sie für jedes Gleichungssystem, ohne zu rechnen, ob es eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen, oder keine Lösung hat.

(a) (i)  $x_1 + 2x_2 = 3$   
(ii)  $x_1 + 2x_2 = 4$

Gleichung (i) widerspricht (ii). Die Lösungsmenge ist leer.

(a) (i)  $x_1 + 2x_2 = 3$   
(ii)  $x_1 + 2x_2 = 4$

Geometrisch:



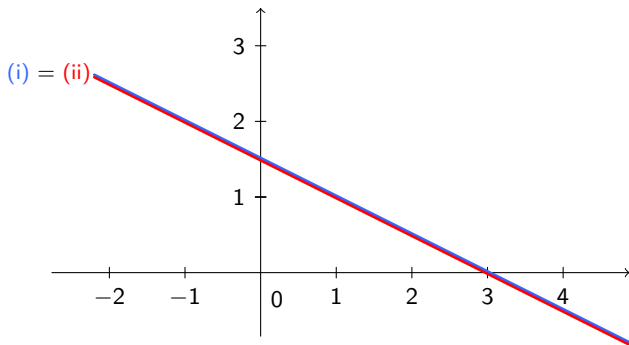
Kein Punkt liegt gleichzeitig auf beiden Geraden.

$$(b) \quad \begin{array}{l} (i) \quad x_1 + 2x_2 = 3 \\ (ii) \quad x_1 + 2x_2 = 3 \end{array}$$

Die Gleichungen stimmen überein: Es gibt unendliche viele Lösungen, da man (i) für jeden Wert von  $x_2$  nach  $x_1$  auflösen kann.

(b) (i)  $x_1 + 2x_2 = 3$   
(ii)  $x_1 + 2x_2 = 3$

Geometrisch:



Die beiden Geraden sind identisch: Jeder Punkt  $(x_1, x_2)$  auf der Gerade löst (i) und (ii).

*Dieses LGS hat also je nach rechter Seite keine oder unendlich viele Lösungen.*

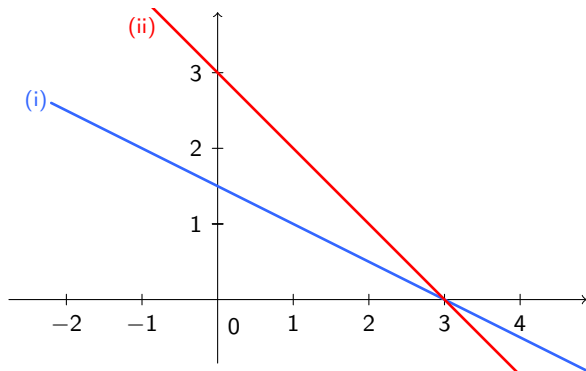
$$(c) \quad \begin{array}{l} (i) \quad x_1 + 2x_2 = 3 \\ (ii) \quad x_1 + x_2 = 3 \end{array}$$

Bei der Subtraktion der Gleichungen entsteht eine Gleichung für  $x_2$  allein, mit einer eindeutigen Lösung. Danach folgt aus (i) oder (ii) eine eindeutige Lösung auch für  $x_1$ .

*Dies gilt bei beliebiger rechter Seite!*

(c) (i)  $x_1 + 2x_2 = 3$   
(ii)  $x_1 + x_2 = 3$

Geometrisch:



Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt  $(x_1, x_2)$ ,  
der Lösung des LGS.

- (i)  $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$   
(d) (ii)  $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$   
(iii)  $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$

Die Gleichung (ii) folgt durch Verdoppeln aus (i) und kann daher weggelassen werden. Dann kann man  $x_1$  beliebig wählen und es resultiert dieselbe Situation wie in (c): In Abhängigkeit von  $x_1$  erhält man eine Lösung für  $x_2$  und  $x_3$ . D.h. man hat eine einparametrische Lösungsschar.



$$\begin{array}{l} \text{(i)} \quad 2x_1 + x_2 = 4 \\ \text{(e) (ii)} \quad \quad \quad 2x_3 = 8 \\ \text{(iii)} \quad 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{array}$$

Gleichung (ii) liefert einen festen Wert für  $x_3$ . Die Gleichungen (i) und (iii) widersprechen sich nicht und haben eine eindeutige Lösung: Addiere das  $-2$ -fache von (i) zu (iii) um  $x_1$  zu bestimmen. Dann folgt  $x_2$  aus (i) oder (iii). Das LGS hat unabhängig von der rechten Seite eine eindeutige Lösung.

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \text{(f)} \quad & \text{(ii)} \quad 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ & \text{(iii)} \quad 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{aligned}$$

Gleichung (ii) entsteht aus Gleichung (i) durch verdoppeln.  
Gleichung (iii) entsteht aus Gleichung (i) durch verdreifachen. Jede Lösung von (i) löst also auch (ii) und (iii).

In (i) kann man  $x_2$  und  $x_3$  beliebig wählen und dann nach  $x_1$  auflösen. Man erhält eine zweiparametrische Lösungsschar.

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \text{(g)} \quad & \text{(ii)} \quad 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ & \text{(iii)} \quad 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8 \end{aligned}$$

Die Summe aus (i) und (ii) widerspricht (iii). Die Lösungsmenge ist leer.

Wäre die 8 eine 6, könnte man (iii) weglassen. Da (ii) durch Verdoppeln aus (i) entsteht, kann man auch (ii) weglassen. (i) kann dann z. B. nach  $x_1$  aufgelöst werden, wobei  $x_2$  und  $x_3$  frei wählbar sind. Man bekommt eine zweiparametrische Lösungsschar.

## Aufgabe 2

Betrachten Sie erneut Ihre Resultate aus den Teilaufgaben. Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der linearen Gleichungssysteme. Wie wirken diese sich auf die Anzahl Lösungen der beiden Gleichungssysteme aus?

**Beobachtung:** Je nach Matrix  $A$  des LGS  $Ax = b$  gilt:

- (A) Entweder das LGS hat unabhängig von  $b$  eine eindeutige Lösung (z. B. Teilaufgabe (c)), oder
- (B) Das LGS hat, abhängig von  $b$ , keine (z. B. Teilaufgabe (g)) oder eine ein- oder mehrparametrische Lösungsschar (z. B. Teilaufgabe (f)), oder
- (C) Das LGS hat unabhängig von  $b$  unendlich viele Lösungen (z. B.  $x_1 + x_2 = b$ ).

### Fragen:

- ▶ Wie kann man es der Matrix  $A$  ansehen, ob man im Fall (A) oder im Fall (B) oder im Fall (C) ist?
- ▶ Wenn man im Fall (B) ist, wie kann man es der rechten Seite  $b$  ansehen, ob man keine oder unendliche viele Lösungen hat?