Lineare Algebra I

Bonusaufgabe 5 (in Serie 11)

1. Betrachten Sie die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ und Mengen:

- $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$
- $D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$
- $E = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$

Beantworten Sie für jede dieser Mengen die folgenden Fragen:

- Ist es möglich, a und/oder b als Linearkombination von Vektoren aus dieser Menge darzustellen?
- Falls ja, geben Sie jeweils ein konkretes Beispiel für eine solche Linearkombination. Stellen Sie zusätzlich dieses Beispiel graphisch in einem zweidimensionalen Koordinatensystem dar.

1. Die Menge

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

enthält insbesondere die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Somit kann man **jeden** Vektor $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ wie folgt als Linearkombination schreiben:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= u \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Menge A ist also insbesondere erzeugend in $\mathbb{R}^2$, aber nicht linear unabhängig (A enthält den Nullvektor).

Also

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 5 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Also

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 5 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Natürlich kann man mit den gegebenen Vektoren in A auch andere Lösungen finden, z. B.

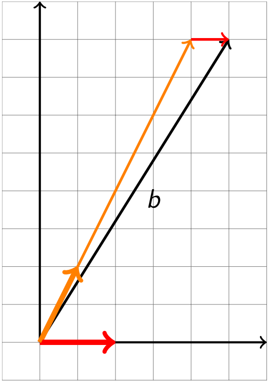
$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 845 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Die Menge

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

enthält insbesondere die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit kann man **jeden** Vektor $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ sofort als Linearkombination schreiben:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

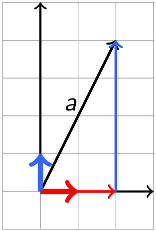
Die Menge B ist also insbesondere erzeugend in $\mathbb{R}^2$, aber nicht linear unabhängig, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

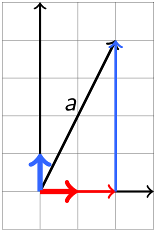
$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Also

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Natürlich kann man mit den gegebenen Vektoren in B auch andere Lösungen finden, z. B.

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In der Menge

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

sind die Vektoren parallel, also linear abhängig:

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ also } -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit lassen sich nur Vektoren in $\operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ mit den Vektoren aus C als Linearkombination schreiben

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Mit den Vektoren in der Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

kann man jeden Vektor in $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination darstellen, insbesondere:

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

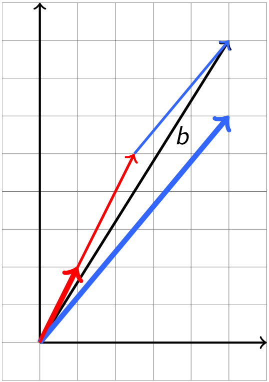
und

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ist ein LGS für α_1, α_2 mit der **eindeutigen** Lösung

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren in D sind erzeugend in $\mathbb{R}^2$ und linear unabhängig.


b

Mit dem Vektor in der Menge

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

kann man nur Vektoren in

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ u \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R} \right\}$$

als Linearkombination darstellen, also nur a:

$$a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Beobachtungen

- Weniger als zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind nicht erzeugend.
- Mehr als zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind linear abhängig.
- Zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind erzeugend genau dann, wenn sie linear unabhängig sind.

2. Betrachten Sie die Polynome $p(t) = 4t + 2$ und $q(t) = 8t + 5$ und untersuchen Sie die folgenden Mengen:

- $A = \{2t + 1,\ 2,\ 0,\ 3t\}$
- $B = \{1, t, t + 1\}$
- $C = \{2t + 1,\ 8t + 4\}$
- $D = \{2t + 1,\ 6t + 5\}$
- $E = \{8t + 4\}$

Ist es möglich, p und/oder q als Linearkombination von Polynomen aus der jeweiligen Menge darzustellen? Können Sie mit Hilfe Ihrer Resultate aus der vorhergehenden Aufgabe diese Frage beantworten, ohne zu rechnen? Begründen Sie Ihre Antwort. Verifizieren Sie Ihre Überlegungen, indem Sie konkrete Beispiele für solche Linearkombinationen geben, falls möglich.

Idee. Ordne jedem Vektor $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ das Polynom $a + bt \in \mathcal{P}_1$ zu:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a + bt$$

Dann entspricht jede Linearkombination von Vektoren in $\mathbb{R}^2$ der entsprechenden Linearkombination von Polynomen in $\mathcal{P}_1$: Also z. B.

$$\begin{array}{ccccccc} a & = & \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} & = & 1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & + & \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ p(t) & = & 2 + 4t & = & 1 \cdot 2 & + & \frac{4}{3} \cdot 3t \end{array}$$

Auf diese Weise kann man alle Ergebnisse der Aufgabe 1 auf die Aufgabe 2 übertragen.

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \tfrac{5}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{8}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$q(t) = 5 + 8t = \tfrac{5}{2} \cdot 2 + \tfrac{8}{3} \cdot 3t$$

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{4}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 845\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p(t) = 2 + 4t = 1 \cdot 2 + \tfrac{4}{3} \cdot 3t + 845 \cdot 0$$

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$p(t) = 2 + 4t = 2 \cdot (1 + 2t)$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q(t) = 5 + 8t = 4 \cdot (1 + 2t) + \tfrac{1}{2} \cdot 2$$

$$a = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$p(t) = 2+4t = 2\cdot 1 + 4\cdot t$$

$$b = \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$q(t) = 5+4t = 5\cdot 1 + 8\cdot t$$

$$a = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$p(t) = 2+4t = -2\cdot 1 + 4\cdot (1+t)$$

$$a = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$$

$$p(t) = 2+4t = 2\cdot (1+2t) = \frac{1}{2}\cdot (4+8t)$$

$$b = \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$$

$$q(t) = 5+8t = \frac{5}{2}\cdot (1+2t) + \frac{1}{2}\cdot (5+6t)$$

Beobachtungen

- Weniger als zwei Vektoren in $\mathcal{P}_1$ sind nicht erzeugend.
- Mehr als zwei Vektoren in $\mathcal{P}_1$ sind linear abhängig.
- Zwei Vektoren in $\mathcal{P}_1$ sind erzeugend genau dann, wenn sie linear unabhängig sind.