Serie 4 - Bonusaufgabe 3

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt bis zum **Freitag, 18. Oktober 10:00** mit dem SAM-Upload Tool (Link über https://metaphor.ethz.ch/x/2024/hs/401-0171-00L/). Die Abgabe kann ausschliesslich in derjenigen Übungsgruppe erfolgen, in die Sie sich zu Beginn des Semesters eingeschrieben haben. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.
Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

1 Aufgaben zur Matrixmultiplikation

(a) Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob für die folgenden Matrixprodukte Gleichheit gilt.

(i) Gilt $IG = GI$?
(ii) Gilt $DH = HD$?
(iii) Gilt $FH = HF$?
(iv) Gilt $DF = FD$?
(v) Gilt $DG = GD$?
(vi) Gilt $GH = HG$?

Begründen Sie alle Ihre Entscheidungen. Vergleichen Sie Ihre Resultate: Für welche der obigen Matrizenpaare gilt die Gleichheit der Matrixprodukte, für welche gilt sie nicht?

Versuchen Sie, Ihre Beobachtungen zu verallgemeinern: Gibt es eine Matrix A, sodass für jede beliebige Matrix B stets $AB = BA$ gilt? Falls ja, geben Sie ein Beispiel für eine solche Matrix. Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & -4 \\ -6 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie Werte für die Koeffizienten b_1 und b_2 von B, so dass $AB = BA$ erfüllt ist. Finden Sie andererseits Werte für die Koeffizienten b_1 und b_2 von B, so dass $AB \neq BA$ gilt.

Versuchen Sie, Ihre Beobachtungen zu verallgemeinern: Welche Eigenschaften müssen die Koeffizienten einer allgemeinen Matrix

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

erfüllen, so dass $AC = CA$ gilt?

(c) Seien E, F, G, H beliebige reelle 2×2-Matrizen. Welche der folgenden Gleichungen gelten allgemein (das heisst, dass sie für **alle** Matrizen gelten müssen)? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) $EFG + EFG = 2EFG$

(ii) $EFG + EGF = 2EFG$

(iii) $G(H + E) = GE + GH$

(iv) $EFEFG + FEEFG + E^2F^2G = 3E^2F^2G$

(v) $EGHH + EGGH = (EGH + EG^2)H$

(vi) $(GH)^2 = G^2H^2$

Serie 4

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 25. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (Link über https://metaphor.ethz.ch/x/2024/hs/401-0171-00L/).

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $(AB)^T = A^T B^T$.

(b) $(AB)^T = B^T A^T$.

(c) $A^T A$ ist symmetrisch.

(d) AA^T ist symmetrisch.

(e) Ist C eine beliebige quadratische Matrix, so ist $C + C^T$ symmetrisch.

2. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:

(i) AB (ii) BA (iii) Ax (iv) $A^2 := AA$
(v) $B^2 := BB$ (vi) $y^T x$ (vii) yx (viii) xy^T
(ix) $B^T y$ (x) $y^T B$.

(b) Lösen Sie (a) nochmals mit Hilfe von Matlab.

3. *Polynominterpolation*
Gegeben sind die Funktionswerte $y_0, y_1, \ldots, y_n$ über den Abszissen $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
Gesucht ist das interpolierende Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Es soll also gelten

$$p(x_i) = y_i \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq n.$$

(a) Man bestimme das Gleichungssystem für die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in Matrixschreibweise.

(b) Man bestimme das Interpolationspolynom für

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	1	0	2	0

$(n = 4)$.

(c) Man betrachte die Polynome

$$\ell_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Welche Werte nimmt ℓ_i in den Punkten x_k an? Man bestimme die Lösung von (b) mit Hilfe der Polynome ℓ_i (Lagrange'sche Interpolationsformel).

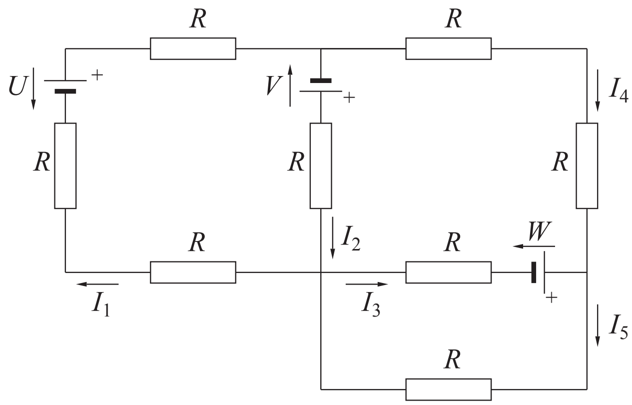
4. *Kirchhoffsche Regeln*
Für elektrische Stromkreise gelten die folgenden zwei Regeln:

- Die Summe der Teilströme in jedem Knoten ist Null.
- Die Summe der Teilspannungen in jeder Masche ist Null.

Bestimmen Sie das lineare Gleichungssystem für die fünf Teilströme des unten skizzierten Gleichstromkreises und lösen Sie es für

$$R = 300\Omega, \quad U = V = 300V, \quad W = 200V.$$

Hinweis: Wählen Sie die Vorzeichen entsprechend den Zählpfeilen!


R
R
U
+
V
+
I4
R
R
R
I2
R
W
R
+
I1
I3
I5
R