Serie 5

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 1. November um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (Link über https://metaphor.ethz.ch/x/2024/hs/401-0171-00L/).

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Seien u und v Lösungen des LGS $Ax = b$ mit n Unbekannten. Der Rang des LGS sei r. Falls $n = r$ gilt, so folgt $u = v$.

(b) Sei $Ax = 0$ ein homogenes LGS und $x \neq 0$ eine Lösung davon. Dann ist der Rang r des Gleichungssystems gleich der Anzahl n der Unbekannten.

(c) Sei $Ax = b$ ein LGS, das keine Lösung besitzt. Dann ist sein Rang r grösser als die Anzahl m seiner Gleichungen.

(d) Sei $Ax = b$ ein LGS mit n Unbekannten und ebensovielen Gleichungen. Sei $u \neq 0$ eine Lösung des homogenen LGS $Ax = 0$ und v eine Lösung von $Ax = b$. Dann hat $Ax = b$ noch unendlich viele weitere Lösungen.

2. *Ränge einer Menge linearer Gleichungssysteme*
Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von a – den Rang des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & + & (a^2+3a)x_4 & = & 0 \\
-2x_1 & - & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = & 0
\end{array}$$

mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

3. *Kommutierende Matrizen*
Bestimmen Sie, welche Matrizen B mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

kommutieren, d.h. für welche Matrizen B die Gleichung $AB = BA$ gilt.

4. *Kreuzprodukt zweier Vektoren*
Es seien $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ und $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$. Dann ist das Vektorprodukt von x und y definiert als

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine 3×3-Matrix B so, dass

$$x \times y = By.$$

(b) Zeigen Sie, dass $x \times y$ senkrecht auf x und y steht.

(c) Rechnen Sie eine der folgenden Identitäten nach:
$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ (Grassmann-Identität)
$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$ (Jacobi-Identität)
$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d)$ (Lagrange-Identität)

(d) Verwenden Sie die obige Lagrange-Identität um zu zeigen, dass

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin(\varphi)$$

gilt, wobei $0 \leq \varphi \leq \pi$ der von a und b eingeschlossene Winkel ist. Dieser Satz besagt, dass die Länge des Vektors $a \times b$ gleich der Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms ist.

Hinweis: Es gilt

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos(\varphi).$$