Serie 11 - Bonusaufgabe 5

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt bis zum **Freitag, 6. Dezember 10:00** mit dem SAM-Upload Tool (Link über https://metaphor.ethz.ch/x/2024/hs/401-0171-00L/). Die Abgabe kann ausschliesslich in derjenigen Übungsgruppe erfolgen, in die Sie sich zu Beginn des Semesters eingeschrieben haben. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.
Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

1 Aufgaben zu Basen

(a) Betrachten Sie die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Betrachten Sie zudem die folgenden Mengen von Vektoren:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$
$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$
$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beantworten Sie für jede dieser Mengen die folgenden Fragen:

(i) Ist es möglich, einen oder beide der Vektoren a und b als Linearkombination von Vektoren aus dieser Menge darzustellen?

(ii) Falls ja, geben Sie für jeden Vektor ein konkretes Beispiel für eine solche Linearkombination. Stellen Sie dieses Beispiel zusätzlich graphisch in einem 2-dimensionalen Koordinatensystem dar.

Verwenden Sie für jede Menge jeweils ein eigenes Koordinatensystem. Begründen Sie Ihre Antworten.

Analysieren Sie Ihre obigen Resultate unter den folgenden Gesichtspunkten: Was beobachten Sie? Wie viele Vektoren scheinen Sie mindestens zu benötigen, um sowohl für a als auch für b eine Linearkombination zu finden? Welche Eigenschaften muss diese Menge von Vektoren erfüllen? Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Versuchen Sie die folgende Frage mithilfe Ihrer Resultate aus der vorherigen Aufgabe zu beantworten, ohne zu rechnen. Begründen Sie ausserdem, wieso dies möglich ist.

Betrachten Sie die Polynome $p(t) = 4t + 2$ und $q(t) = 8t + 5$ sowie die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} A &= \{2t+1,\ 2,\ 0,\ 3t\} \\ B &= \{1, t, t+1\} \\ C &= \{2t+1,\ 8t+4\} \\ D &= \{2t+1,\ 6t+5\} \\ E &= \{8t+4\}\,. \end{aligned}$$

Ist es möglich, eines oder beide der Polynome p und q als Linearkombination von Polynomen aus der jeweiligen Menge darzustellen?

Verifizieren Sie Ihre Überlegungen, indem Sie konkrete Beispiele für solche Linearkombinationen geben, falls welche existieren.

Serie 11

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 13. Dezember um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (Link über https://metaphor.ethz.ch/x/2024/hs/401-0171-00L/).

1. Betrachten Sie die Menge $\mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ der Paare positiver, reeller Zahlen, gegeben als Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+ \quad \text{mit} \quad a_1 \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty) \ \text{ und } \ a_2 \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty).$$

Die Addition auf $\mathbb{R}^2_+$ sei folgendermassen definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden betrachten wir drei verschiedene Definitionen der Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. Definition: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$

2. Definition: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 \\ e^\lambda x_2 \end{pmatrix}.$

3. Definition: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix}.$

Welche der folgenden Behauptungen sind korrekt?

Die Menge $\mathbb{R}^2_+$ ist ein Vektorraum mit der oben definierten Addition und Multiplikation mit einem Skalar λ gemäss der ...

(a) 1. Definition.

(b) 2. Definition.

(c) 3. Definition.

2. *Spatprodukt in* $\mathbb{R}^3$
Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ drei Spaltenvektoren. Das *Spatprodukt* $S(a, b, c)$ dieser drei Vektoren a, b, c ist dann definiert als

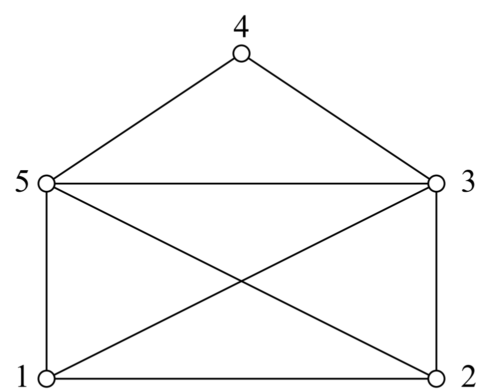
$$S(a, b, c) := (a \times b) \cdot c.$$

(a) Beweisen Sie, dass $S(a, b, c) = \det(a, b, c)$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass $|S(a, b, c)|$ das Volumen des von a, b und c aufgespannten Parallelepipeds (Spat) ist.

(c) Was sagt das Vorzeichen von $S(a, b, c)$ aus?

3. Wir interpretieren den Graphen G



G

aus Serie 10, Aufgabe 4 als elektrisches Netzwerk, wobei jede Kante einem Widerstand von $R_0 = 1\Omega$ entspricht. Berechnen Sie den Widerstand R zwischen den Knoten 1 und 5 mit Hilfe der Formel

$$R = R_0 \frac{\tau_{1,5}}{\tau},$$

wobei τ die Anzahl der aufspannenden Bäume von G ist und $\tau_{1,5}$ die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 enthalten. Verwenden Sie dazu die Formel aus Serie 10, Aufgabe 4.

Hinweis: Die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 *nicht* enthalten, ist gleich der Anzahl der aufspannenden Teilbäume des Graphen, den man erhält, wenn man die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 löscht.

4. *Vandermonde-Determinante*

(a) Für die Vandermonde-Determinante gilt die Formel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Verifizieren Sie diese Formel für den Fall $n = 3$.

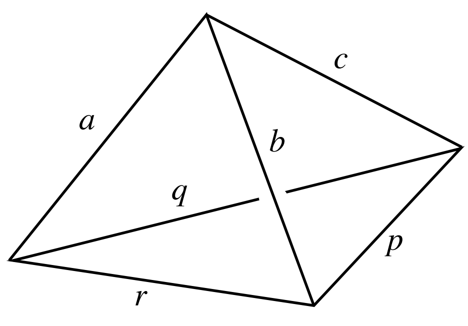
(b) Für die Fläche $F_{\Delta(a,b,c)}$ eines ebenen Dreiecks $\Delta(a,b,c)$ mit den Seiten a, b, c gilt bekanntlich die Flächenformel von Heron

$$F_{\Delta(a,b,c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ der halbe Umfang des Dreiecks $\Delta(a,b,c)$ ist. Man kann zeigen, dass die Formel

$$F^2_{\Delta(a,b,c)} = -\frac{1}{16} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

denselben Wert für $F_{\Delta(a,b,c)}$ ergibt.
Für das Volumen $V_{\Delta(a,b,c,p,q,r)}$ eines Tetraeders $\Delta(a,b,c,p,q,r)$ mit den Kantenlängen a, b, c, p, q, r



$\Delta(a,b,c,p,q,r)$

gilt eine ähnliche Formel, nämlich

$$V^2_{\Delta(a,b,c,p,q,r)} = \frac{1}{2^5 3^2} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & r^2 & q^2 & 1 \\ b^2 & r^2 & 0 & p^2 & 1 \\ c^2 & q^2 & p^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welchen Inhalt $V_{\Delta(a,b,c,p,q,r)}$ hat das Tetraeder $\Delta(a,b,c,p,q,r)$ mit den Kantenlängen $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $p = 4$, $q = 3$ und $r = 2$?