Serie 12

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 20. Dezember um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (Link über https://metaphor.ethz.ch/x/2024/hs/401-0171-00L/).

1. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der Addition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall f, g \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \forall f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Darin enthalten ist der Unterraum

$$P_2 := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0,1,2\}$$

der Polynome mit Grad ≤ 2.
Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\operatorname{span}\{x+1, x-1, x^2+1, x^2-1\}$ ist gleich P_2.

(b) $x+1, x-1, x^2+1, x^2-1$ sind linear unabhängig.

(c) $x+1, x-1, x^2+1, x^2-1$ bilden ein Erzeugendensystem von $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(d) $x+1, x-1, x^2+1, x^2-1$ bilden ein Erzeugendensystem von P_2.

2. Bestimmen Sie, ob

$$V = \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \middle| a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1,2,3 \right\},$$

versehen mit der Standard-Skalarmultiplikation $\cdot$ gegeben durch

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}$$

und der Addition $\oplus$, definiert durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix},$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

3. *Unterräume von* $\mathbb{R}^3$

(a) Sei V die folgende Menge von Vektoren:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x - y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Ist die Menge

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x - 1 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. *Der Vektorraum* $\mathbb{Z}_2^n$ *über dem Körper* $\mathbb{Z}_2$

(a) Die Menge $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$, versehen mit den Rechenregeln

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

ist ein Körper. Das heisst, es gelten bezüglich Addition $\oplus$ und Multiplikation $\odot$ die selben Rechenregeln wie in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}$. Versehen Sie

$$V = \mathbb{Z}_2^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \mid x_i \in \mathbb{Z}_2 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

mit den passenden Vektoroperationen und zeigen Sie, dass V damit ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ wird.

(b) Sei die Menge C gegeben durch

$$C = \{x \in \mathbb{Z}_2^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n \text{ ist gerade}\},$$

wobei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.
Zeigen Sie, dass C ein Unterraum von $\mathbb{Z}_2^n$ ist.

Bemerkung: C ist ein sogenannter 1-fehlererkennender Code: Wird ein Bit einer Nachricht $x \in C$ falsch übermittelt, kann der Empfänger dies feststellen (wie?) und die Wiederholung der Übermittlung veranlassen.