

Lösung Serie 2

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 11. Oktober um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (Link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2024/hs/401-0171-00L/>).

1. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) Jedes lineare Gleichungssystem mit der gleichen Anzahl von Gleichungen wie Unbekannten hat eine eindeutige Lösung.
- (b) Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung.
- (c) Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.
- (d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Lösung: Korrekt ist nur (d), da:

- (a) Jedes lineare Gleichungssystem mit der gleichen Anzahl von Gleichungen wie Unbekannten hat eine eindeutige Lösung.
Nein, z.B. hat das LGS $0 \cdot x = a$ keine Lösung für $a \neq 0$, respektive unendlich viele Lösungen für $a = 0$.
- (b) Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung.
Nein, z.B. hat das LGS $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$ keine Lösung. Finden Sie ein Beispiel mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen.
- (c) Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.
Doch, z.B. kann eine bereits im System vorhandene Gleichung beliebig oft hinzugefügt werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.
- ✓ (d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

2. Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2bx_2 + 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 + &4x_3 = 5 \\ &2bx_2 + 3ax_3 = b \end{aligned}$$

- (a) Lösungen mit zwei freien Parametern besitzt,
- (b) Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,
- (c) eindeutig lösbar ist,
- (d) keine Lösung hat

und geben Sie in jedem Fall die Lösungsmenge an.

Lösung: Mit dem Gauss-Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2b & 3a & b \end{array} \xrightarrow{\text{2. Zeile}-1. \text{ Zeile}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 3a & b \end{array} \begin{array}{l} (*) \\ \end{array} \xrightarrow{\text{3. Zeile}+2. \text{ Zeile}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a & b \end{array} \begin{array}{l} (**) \\ \end{array}$$

1. Fall: $\mathbf{b} = \mathbf{0}$: 2. Zeile und 3. Zeile in $(*)$ vertauschen ergibt mit $b = 0$:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} (***) \\ \end{array}$$

- (i) $\underline{a = 0}$: Die Lösungsmenge ist $x_3 = s$, $x_2 = t$, $x_1 = \frac{5-4x_3}{3} = \frac{5-4s}{3} = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}s$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.
(ergibt sich aus der 1. Zeile von $(***)$)
- (ii) $\underline{a \neq 0}$: Die Lösungsmenge ist $x_3 = 0$ (ergibt sich aus der 2. Zeile von $(***)$), $x_2 = t$,
 $x_1 = \frac{5}{3}$ (ergibt sich aus der 1. Zeile von $(***)$) mit $t \in \mathbb{R}$.

2. Fall: $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$: Hier ist $-2b$ Pivot bei $(*)$ und daher verwenden wir $(**)$ von oben:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a & b \end{array} \begin{array}{l} (**) \\ \end{array}$$

- (i) $\underline{a = 0}$: In diesem Fall gibt es keine Lösung (wegen der 3. Zeile $3a = b$ in $(**)$).

- (ii) $a \neq 0$: Die Lösung ist $x_3 = \frac{b}{3a}$ (aus der 3. Zeile von (**)),
 $x_2 = 0$ (aus der 2. Zeile von (**)),
 $x_1 = \frac{5-4x_3}{3} = \frac{5-4\frac{b}{3a}}{3} = \frac{5}{3} - \frac{4b}{9a}$ (aus der 1. Zeile von (**)).

Folglich gilt

- (a) falls $a = 0, b = 0$: Lösungen mit zwei freien Parametern besitzt,
 (b) falls $a \neq 0, b = 0$: Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,
 (c) falls $a \neq 0, b \neq 0$: eindeutige Lösung,
 (d) falls $a = 0, b \neq 0$: keine Lösung.

3. Dimensionsanalyse des Strömungswiderstands eines Schiffes:

Im cgs-Masssystem gilt für die Einheiten:

Dichte des Wassers	ρ :	$cm^{-3}g^1sec^0$,
Schiffsgeschwindigkeit	v :	$cm^1g^0sec^{-1}$,
benetzte Oberfläche	\mathcal{O} :	$cm^2g^0sec^0$,
Schiffsmasse	m :	$cm^0g^1sec^0$,
Bremsverzögerung	a :	$cm^1g^0sec^{-2}$.

- (a) Welche Formeln des Typs

$$\rho^\alpha v^\beta \mathcal{O}^\gamma m^\delta a^\varepsilon = K$$

sind vom Masssystem her möglich, wenn K eine dimensionslose Zahl sein soll?

- (b) Welche Formeln ergeben sich für die Widerstandskraft $F = ma$?

Bemerkung: Die gefundene Lösung ist bei Schiffbauingenieuren tatsächlich in Gebrauch.

Lösung:

- (a) Wir haben

$$\begin{aligned} \dim(\rho^\alpha v^\beta \mathcal{O}^\gamma m^\delta a^\varepsilon) &= (cm^{-3}g^1sec^0)^\alpha \cdot (cm^1g^0sec^{-1})^\beta \cdot (cm^2g^0sec^0)^\gamma \cdot (cm^0g^1sec^0)^\delta \cdot (cm^1g^0sec^{-2})^\varepsilon \\ &= cm^{-3\alpha+\beta+2\gamma+\varepsilon} g^{\alpha+\delta} sec^{-\beta-2\varepsilon} \\ &= cm^0g^0sec^0 = \dim(K) \end{aligned}$$

Damit K eine dimensionslose Zahl ist, müssen die Summen der Exponenten von cm , g und sec jeweils 0 ergeben. Dies entspricht dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} -3\alpha & + & \beta & + & 2\gamma & & + & \varepsilon & = & 0 \\ \alpha & & & & & & + & \delta & & = & 0 \\ & & -\beta & & & & & & - & 2\varepsilon & = & 0. \end{array}$$

Das entsprechende Gauss-Schema ist

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{ccccc|c}
 \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\
 \hline
 -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 1. \text{ Zeile} \leftrightarrow 2. \text{ Zeile} \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{ccccc|c}
 \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0
 \end{array}
 &
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{c}
 2. \text{ Zeile} \leftrightarrow 3. \text{ Zeile} \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{ccccc|c}
 \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
 -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 2. \text{ Zeile} = -(2. \text{ Zeile}) \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{ccccc|c}
 \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0
 \end{array}
 &
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{c}
 3. \text{ Zeile} + 3 \times (1. \text{ Zeile}) \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{ccccc|c}
 \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 3. \text{ Zeile} - 2. \text{ Zeile} \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{ccccc|c}
 \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0
 \end{array}
 &
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{c}
 3. \text{ Zeile} = \frac{1}{2} \times (3. \text{ Zeile}) \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{ccccc|c}
 \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0
 \end{array}
 &
 (*)
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

und man kann also δ und ε frei wählen, da in der 3. Zeile von (*) drei Zahlen ungleich Null stehen. Setze $\delta = s, \varepsilon = t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. Für die restlichen Exponenten findet man mit (*)

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{2}\delta = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}s, \\
 \beta &= -2\varepsilon = -2t, \\
 \alpha &= -\delta = -s.
 \end{aligned}$$

Die Formeln vom Typ

$$\rho^{-s} v^{-2t} \mathcal{O}^{\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}s} m^s a^t = K$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$ ergeben folglich das gewünschte Resultat.

- (b) Wenn man in die bei (a) erhaltene Formel $s = t = 1$ setzt, um einen Ausdruck zu erhalten, der den Term ma beinhaltet, findet man

$$\rho^{-1} v^{-2} \mathcal{O}^{-1} ma = K.$$

Nach Umformen ergibt dies

$$ma = K \rho v^2 \mathcal{O}.$$

Aus der Formel $F = ma$ folgt also $F = K \rho v^2 \mathcal{O}$.

Bemerkung: Die Konstante K nennt man *Widerstandsbeiwert*.

4. Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$ für $i = 1, 2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie mit dem Gauss-Algorithmus die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme.
 (b) Lösen Sie die Aufgabe nochmals mit Hilfe von MATLAB.

Lösung:

- (a) Für $i = 1, 2$ entspricht $Ax = b_i$ einem linearen Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3 . Wie in Serie 1, Aufgabe 2, kann man beide rechten Seiten im gleichen Gauss-Schema schreiben (der Hauptteil ist gleich):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 3 & -2 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \xrightarrow{1. \text{ Zeile} \leftrightarrow 2. \text{ Zeile}} \begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 6 \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \xrightarrow{2. \text{ Zeile} + 3 \times (1. \text{ Zeile})} \begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & -2 \end{array} \begin{array}{l} 1. \text{ Zeile} = -(1. \text{ Zeile}) \\ 2. \text{ Zeile} = \frac{1}{4} \times (2. \text{ Zeile}) \end{array} \begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \quad (*) \end{array}$$

Für b_1 mit $Ax = b_1$ folgt also:

x_3 beliebig, also $x_3 = t \in \mathbb{R}$ ist ein freier Parameter (aus der 2. Zeile von (*) ersichtlich),
 $x_2 + 2x_3 = 1 \implies x_2 = 1 - 2x_3 = 1 - 2t$ (aus der 2. Zeile von (*) ersichtlich),
 $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1$ (aus der 1. Zeile von (*) ersichtlich)
 $\implies x_1 = -1 + 3x_3 + 2x_2 = -1 + 3t + 2(1 - 2t) = -1 + 3t + 2 - 4t = 1 - t$.

Die Lösungsmenge L_1 von $Ax = b_1$ ist also

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - t \\ 1 - 2t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für b_2 mit $Ax = b_2$ folgt analog

x_3 beliebig, also $x_3 = s \in \mathbb{R}$ ist ein freier Parameter (aus der 2. Zeile von (*) ersichtlich),
 $x_2 + 2x_3 = 3 \implies x_2 = 3 - 2x_3 = 3 - 2s$ (aus der 2. Zeile von (*) ersichtlich),
 $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2$ (aus der 1. Zeile von (*) ersichtlich)
 $\implies x_1 = -2 + 3x_3 + 2x_2 = -2 + 3s + 2(3 - 2s) = -2 + 3s + 6 - 4s = 4 - s$.

Die Lösungsmenge L_2 von $Ax = b_2$ ist somit

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 - s \\ 3 - 2s \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Siehe Lösung Serie 1, Aufgabe 4.