

## Lösung Serie 3

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 18. Oktober um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (Link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2024/hs/401-0171-00L/>).

1. Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$  ist das LGS  $Ax = b$  lösbar?

- (a) Für alle  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ .
- (b) Für keine  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ .
- (c) Für alle  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$  mit  $b_3 + b_2 - b_1 = 0$ .
- (d) Für alle  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$  mit  $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$ .
- (e) Das lässt sich nicht entscheiden.

**Lösung:** Korrekt ist nur (c), da:

- (a) Für alle  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ .

*Falsch. Z.B. existiert für keinen der drei Vektoren  $b \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  eine Lösung.*

(b) Für keine  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ .

*Falsch.* Für  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  existiert immer mindestens die Lösung  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

*Eine andere Argumentation:* Setzt man in  $Ax = b$  irgendetwas für  $x$  ein, so erhält man einen Vektor  $b$  für den dieses  $x$  eine Lösung ist.

✓ (c) Für alle  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$  mit  $b_3 + b_2 - b_1 = 0$ .

(d) Für alle  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$  mit  $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$ .

*Falsch.* Nimmt man für  $b$  den Nullvektor, so existiert mit  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  eine Lösung, aber  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$  wird durch die Ungleichung  $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$  ausgeschlossen.

(e) Das lässt sich nicht entscheiden.

Mit dem Gauss-Verfahren erhalten wir für  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 0 & 4 & -3 & b_3 \end{array} \xrightarrow{\text{2. Zeile}-1, \text{ Zeile}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & b_2 - b_1 \\ 0 & 4 & -3 & b_3 \end{array} \xrightarrow{\text{3. Zeile}+2, \text{ Zeile}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array} \quad (*)$$

Also gibt es eine Lösung für alle  $b_1, b_2, b_3$  mit  $b_3 + b_2 - b_1 = 0$  (aus der 3. Zeile von  $(*)$  ersichtlich).

## 2. Ebenenschnitt

(a) Für welche Werte von  $t$  schneiden sich die vier im untenstehenden Gleichungssystem gegebenen Ebenen im  $\mathbb{R}^3$ ?

$$\begin{array}{rcccc} & & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 2t \\ 2(x & - & y) & + & t(z + 1) & = & 0. \end{array}$$

(b) Das folgende MATLAB-Skript visualisiert die Lösung des LGS  $x + y - z = 5$ ,  $x - y - z = 0$ ,  $4x - z = 2$ .

```

ezsurf('x+y-5')
% plottet den Graphen der Funktion z=f(x,y)=x+y-5 (Sie koennen
% auch andere (zwei) Variablenamen waehlen)
hold on
% hold dient dazu, alle Graphen in derselben Figur anzuordnen
% (Figur nicht schliessen waehrend dem Ausfuehren der Befehle)
ezsurf('x-y')
ezsurf('4*x-2')
hold off

```

Ändern Sie dieses Skript so ab, dass es für die im Teil (a) gefundenen Werte von  $t$  den Schnitt der vier Ebenen visualisiert.

### Lösung:

(a) Das gegebene Gleichungssystem ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
 y + z &= 0 \\
 2x - y + z &= 0 \\
 x + y &= 2t \\
 2x - 2y + tz &= -t.
 \end{aligned}$$

Der Schnitt der Ebenen entspricht der Lösungsmenge des Gleichungssystems in den Variablen  $x, y, z$  mit Parameter  $t$ . Mit dem Gaußverfahren erhalten wir (wobei Z für Zeile steht)

$$\begin{array}{ccc|c}
 x & y & z & 1 \\
 \hline
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 2 & -1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 2t \\
 2 & -2 & t & -t
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 1.Z=3.Z, 2.Z=1.Z \\
 3.Z=2.Z, 4.Z=4.Z
 \end{array}
 \begin{array}{ccc|c}
 x & y & z & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 2t \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 2 & -1 & 1 & 0 \\
 2 & -2 & t & -t
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 3.Z-2 \times (1.Z) \\
 4.Z-2 \times (1.Z)
 \end{array}
 \begin{array}{ccc|c}
 x & y & z & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 2t \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & -3 & 1 & -4t \\
 0 & -4 & t & -5t
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc|c}
 x & y & z & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 2t \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 4 & -4t \\
 0 & 0 & t+4 & -5t
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 3.Z+3 \times (2.Z) \\
 3.Z+4 \times (2.Z)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 4.Z-\frac{t+4}{4} \times (3.Z)
 \end{array}
 \begin{array}{ccc|c}
 x & y & z & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 2t \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 4 & -4t \\
 0 & 0 & 0 & -5t - \frac{t+4}{4} \cdot (-4t) = t^2 - t = t(t-1)
 \end{array}
 \quad (*)$$

Die Verträglichkeitsbedingung  $t(t-1) = 0$  ist nur für  $t = 0$  und  $t = 1$  erfüllt.

Für  $t = 0$  findet man durch Rückwärtseinsetzen:

$$z = 0 \text{ (aus der 3. Zeile von (*): } 4z = -4t),$$

$$y = 0 \text{ (aus der 2. Zeile von (*): } y = 0 - z),$$

$$x = 0 \text{ (aus der 1. Zeile von (*): } x = 2t - y).$$

Für  $t = 1$  findet man durch Rückwärtseinsetzen:  
 $z = -1$  (aus der 3. Zeile von (\*):  $4z = -4t$ ),  
 $y = 1$  (aus der 2. Zeile von (\*):  $y = 0 - z$ ),  
 $x = 1$  (aus der 1. Zeile von (\*):  $x = 2t - y$ ).

Der Schnitt der Ebenen entspricht also in den Fällen  $t = 0$  und  $t = 1$  jeweils einem einzelnen Punkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ .

(b) Das folgende MATLAB-Skript zeigt den Fall  $t = 0$ :

```
% t=0
ezsurf('0*x-z')
% "0*x" steht nur da, damit die Achsenlabels automatisch korrekt sind
hold on
ezsurf('2*x+z')
ezsurf('-x+0*z')
ezsurf('x+0*z')
hold off
```

### 3. Multidimensionale Gleichungssysteme variabler Grösse

(a) Lösen Sie für  $n \geq 2$  das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^n (i - k)x_i = 1 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n.$$

(b) Lösen Sie für  $n \geq 1$  das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} &= 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n. \\ y_{n+1} &= 1 \end{aligned}$$

#### Lösung:

(a) Wir lösen das folgende Gleichungssystem  
 $(x_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  Spalten und  $k = 1, 2, \dots, n$  Zeilen):

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$	1
0	1	2	$\dots$	$n - 1$	1
-1	0	1	$\dots$	$n - 2$	1
-2	-1	0	$\dots$	$n - 3$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$-(n - 1)$	$-(n - 2)$	$-(n - 3)$	$\dots$	0	1

Wenn wir für  $k = 2, 3, \dots, n$  von der  $k$ -ten Zeile die  $(k - 1)$ -te Zeile abziehen und die erste Zeile unverändert lassen, erhalten wir

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist also äquivalent zu (doppelte Zeilen streichen)

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist also äquivalent zu  
(Multiplikation der 2. Zeile mit  $-1$ , Zeilen vertauschen)

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & & 1 \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist folglich

$$\begin{aligned} x_n &= t_1 \text{ (aus der 2. Zeile)} \\ x_{n-1} &= t_2 \text{ (aus der 2. Zeile)} \\ &\vdots \\ x_3 &= t_{n-2} \text{ (aus der 2. Zeile)} \\ x_2 &= 1 - \sum_{i=1}^{n-2} (n-i)t_i \text{ (aus der 2. Zeile)} \\ x_1 &= -\sum_{i=2}^n x_i = -1 + \sum_{i=1}^{n-2} (n-i-1)t_i \text{ (aus der 1. Zeile)} \end{aligned}$$

für  $t_1, t_2, \dots, t_{n-2} \in \mathbb{R}$  beliebig.

- (b) Wir lösen das folgende Gleichungssystem  
( $y_i$  für  $i = 0, 1, 2, \dots, n + 1$  Spalten und  $k = 1, 2, \dots, n + 2$  Zeilen):

$$\begin{array}{cccccc|cc|c} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_n & y_{n+1} & & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & & 0 & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Um die Matrix auf Zeilenstufenform zu bringen, führen wir die folgenden  $n$  Schritte durch (nur die erste und letzte Zeile bleiben dabei unverändert):

1. Schritt: Wir ziehen die 1. Zeile von der 2. Zeile ab.

2. Schritt: Wir addieren die 2. Zeile der neuen Matrix zum 2-fachen der 3. Zeile.

$k$ . Schritt: Wir addieren die  $k$ -te Zeile der neuen Matrix zum  $k$ -fachen der  $(k + 1)$ -ten Zeile für  $k = 3, 4, \dots, n$ .

Somit erhalten wir die Matrix

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_n & y_{n+1} & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & \dots & & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & -(n+1) & n & 0 \\
 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

Nach Normieren der Zeilen ( $k$ . Zeile multipliziert mit  $-\frac{1}{k}$  für  $k = 2, 3, \dots, n + 1$  und erste und letzte Zeile beibehalten) wird diese zu

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_n & y_{n+1} & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \dots & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \dots & & 0 & 0 (*) \\
 \vdots & \vdots & \ddots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & 1 & -\frac{n}{n+1} & 0 \\
 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= 1 \quad (\text{aus der } (n+2)\text{-ten Zeile von } (*)) \\
 y_n &= \frac{n}{n+1} \cdot y_{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad (\text{aus der } (n+1)\text{-ten Zeile von } (*)) \\
 y_{n-1} &= \frac{n-1}{n} \cdot y_n = \frac{n-1}{n+1} \quad (\text{aus der } n\text{-ten Zeile von } (*)) \\
 y_{n-2} &= \frac{n-2}{n-1} \cdot y_{n-1} = \frac{n-2}{n+1} \quad (\text{aus der } (n-1)\text{-ten Zeile von } (*)) \\
 &\vdots \\
 y_k &= \frac{k}{k+1} \cdot y_{k+1} = \frac{k}{n+1} \quad (\text{aus der } (k+1)\text{-ten Zeile von } (*)) \\
 &\vdots \\
 y_2 &= \frac{2}{3} \cdot y_3 = \frac{2}{n+1} \quad (\text{aus der 3-ten Zeile von } (*)) \\
 y_1 &= \frac{1}{2} \cdot y_2 = \frac{1}{n+1} \quad (\text{aus der 2-ten Zeile von } (*)) \\
 y_0 &= 0 = \frac{0}{n+1} \quad (\text{aus der 1-ten Zeile von } (*))
 \end{aligned}$$

oder allgemein

$$y_k = \frac{k}{n+1} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n+1.$$

#### 4. Numerische Problematik bei linearen Gleichungssystemen

(a) Lösen Sie

$$\begin{pmatrix} 1044.005 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

(b) “Lösen” Sie mit einem gewöhnlichen Taschenrechner

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie, dass jedes  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , das zur Lösungsmenge beider Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gehört, auch eine Lösung von **(b)** ist und lösen Sie damit **(b)**.

## Lösung:

(a) Offensichtlich lautet die Lösung  $x = 0, y = 1$ , da

$$\begin{pmatrix} 1044.005 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

(b) Mit dem Taschenrechner findet man die Lösung  $x = 0, y = 1$  (oder je nach Taschenrechner zumindest eine Lösung mit relativ grossem Fehler). Beim Einsetzen ins Gleichungssystem sieht man jedoch, dass diese falsch ist, da

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0028 \\ 116.0005 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}.$$

Der Rundungsfehler ist zu gross!

(c) Falls

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gelten, gilt auch

$$\begin{aligned} \underbrace{\left[ \begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} + 10^{-4} \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \right]}_{=(*)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 10^{-4} \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}}_{= (**)} + 10^{-4} \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit (durch Ausrechnung von (\*) und (\*\*))

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ist  $x = 2, y = -2$ , da

$$\begin{aligned} 5 \times [45x + 28y = 34] - 28 \times [8x + 5y = 6] &\iff [(225x - 224x) + (140y - 140y) = 170 - 168] \\ &\iff x = 2 \\ &\implies 5y = 6 - 8x = 6 - 8 \cdot 2 = -10 \\ &\iff y = -2. \end{aligned}$$



Durch Einsetzen sieht man, dass  $x = 2$ ,  $y = -2$  auch eine Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}$$

ist, da

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist  $x = 2$ ,  $y = -2$  eine Lösung der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}$$

aus **(b)**. Da der Rang dieses LGS aus **(b)** gleich 2 ist (weil  $\frac{174.0008}{1044.0045} \neq \frac{116.0005}{696.0028}$ ), ist diese Lösung eindeutig.