

# Lösung Serie 10

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 6. Dezember um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (Link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2024/hs/401-0171-00L/>).

1. Für die vier Vektoren

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Matrix  $A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  gelten welche der folgenden Aussagen?

- (a)  $\det(A) = 0$ .
- (b) Der Rang von  $A$  ist 3.
- (c) Das Gleichungssystem  $A\mathbf{x} = 0$  hat nicht-triviale Lösungen.
- (d) Das Gleichungssystem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  hat genau eine Lösung.
- (e) Die Lösbarkeit von  $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$  hängt von der Wahl von  $\mathbf{v}$  ab.
- (f) Die Matrix  $A$  hat eine Inverse.

**Lösung:** Korrekt sind (a), (c) und (e), da:

✓ (a)  $\det(A) = 0$ .

*Richtig, die erste Zeile von  $A$  ist das  $(-1)$ -fache der zweiten Zeile von  $A$ , da*

$$A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

*und*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Addiert man die erste zur zweiten Zeile (eine Operation die die Determinante unverändert lässt), so erhält man eine Matrix mit einer Nullzeile und somit ist

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 0.$$

(b) Der Rang von  $A$  ist 3.

Falsch, für eine  $3 \times 3$ -Matrix gilt  $\text{Rang}(A) = 3 \iff \det(A) \neq 0$ .

Alternativ kann man auch argumentieren, dass beim Gauss'schen Eliminationsverfahren gleich im ersten Schritt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.Z=2.Z+1.Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

wie oben gezeigt, eine Nullzeile entsteht und daher der Rang nicht maximal (also = 3) sein kann.

✓ (c) Das Gleichungssystem  $A\mathbf{x} = 0$  hat nicht-triviale Lösungen.

Richtig, alle Vielfachen  $\lambda\mathbf{x}$  von

$$\mathbf{x} = (3, -2, 1)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind Nulllösungen, da

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2 - 1 \\ -3 + 2 + 1 \\ 0 + 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_3$$

und

$$A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Alternativ kann man auch benutzen, dass  $\det(A) = 0$  äquivalent zu dieser Aussage ist.

Die obige Lösung  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  findet man wie folgt: Es muss gelten

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hier setzt man nun  $x_3 := 1$  und daraus folgt sofort  $x_2 = -2$ ,  $x_1 = 3$ .

(d) Das Gleichungssystem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  hat genau eine Lösung.

*Falsch, dies wäre gleichbedeutend mit  $\det(A) \neq 0$  ( $\iff A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ist für beliebige  $\mathbf{b}$  eindeutig lösbar). Da  $\det(A) = 0$  gilt, hat das Gleichungssystem entweder keine oder unendlich viele Lösungen, aber nie genau eine.*

*Für das gegebene  $\mathbf{b}$  existieren unendlich viele Lösungen, da*

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (*)$$

*die Lösungen*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda + 3 \\ -2\lambda - 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

*hat. Dabei haben wir in (\*) zuerst  $x_3 := \lambda$  gesetzt und dann nach  $x_2 = -2\lambda - 1$  und  $x_1 = 3\lambda + 3$  aufgelöst.*

✓ (e) Die Lösbarkeit von  $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$  hängt von der Wahl von  $\mathbf{v}$  ab.

*Richtig. Da die Matrix  $A$  den Rang 2 hat, bildet die Menge der Vektoren  $\mathbf{v}$ , für die eine Lösung existiert – und dann gleich unendlich viele Lösungen –, eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$ . Für alle  $\mathbf{v}$ , die nicht in dieser Ebene liegen – zumindest optisch sind das die meisten –, existiert keine Lösung.*

(f) Die Matrix  $A$  hat eine Inverse.

*Falsch, da  $\det(A) = 0$  impliziert, dass die Inverse  $A^{-1}$  nicht existiert.*

*Diese Aussage (f) ist äquivalent zu (b) und zu (d) und somit falsch.*

Siehe auch Abschnitt 3.4, Determinanten und lineare Gleichungssysteme, in “K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage 2002”.

**Wichtig:** Hier wie dort gelten die Aussagen nur für quadratische Matrizen.

**2. [Prüfungsaufgabe, Frühling 2007]** Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie  $\det(A)$ .

(b) Für welche Werte der Parameter  $a, b, c, d$  ist die Matrix  $A$  singulär?

**Lösung:**

(a) Erste Variante mit Laplace'schem Entwicklungssatz:

Es gilt

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{E 1.Z}{=} (-1)^{1+1} \cdot a \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{E 1.Z}{=} a \cdot \left[ (-1)^{1+1} \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & c \\ d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & c \\ 1 & d & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \\ &= a \cdot \left[ (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & c \\ d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & c \\ 1 & d & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \\ &\stackrel{E 1.Z}{=} \stackrel{E 1.Z}{=} a \cdot \left[ (-2) \cdot (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c \\ d & 1 & 2 \end{pmatrix} - (-1)^{1+1} \cdot b \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c \\ d & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \\ &= a \cdot \left[ 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c \\ d & 1 & 2 \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c \\ d & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \\ &\stackrel{E 1.Z}{=} \stackrel{E 1.Z}{=} a \cdot \left[ 6 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & c \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - b \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & c \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \\ &= a \cdot \left[ 6 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & c \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & c \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \\ &= a \cdot [6 \cdot ((-1) \cdot 2 - c \cdot 1) - b \cdot ((-1) \cdot 2 - c \cdot 1)] \\ &= a \cdot [6 \cdot (-2 - c) - b \cdot (-2 - c)] \\ &= a \cdot (-2 - c) \cdot [6 - b] \\ &= -a \cdot (2 + c) \cdot (6 - b) \\ &= -a \cdot (c + 2) \cdot (6 - b) \\ &= a \cdot (c + 2) \cdot (b - 6),\end{aligned}$$

wobei E für Expansion nach der gegebenen Zeile Z steht.

**Zweite und Dritte Variante:**

Wir betrachten im Folgenden

$$A^T = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix}$$

anstelle von  $A$ , da  $\det(A) = \det(A^T)$  und  $\det(A^T)$  hier einfacher zu berechnen ist.

**Zweite Variante mit Determinantenformel für Blockmatrizen:**

Aus "K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage 2002", Lemma 3.7 oder der Vorlesungswoche 9 wissen wir, dass für quadratische Blockmatrizen  $M$  der Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

wobei die Matrizen  $A$  und  $B$  ebenfalls quadratische Matrizen sind, gilt:

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(C). (*)$$

Dies kann man natürlich auch rekursiv anwenden. Zerlege die Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

wobei  $a = a \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ,

$$B = (1 \ 2 \ 0 \ -1 \ 5), \quad 0 = 0_{5 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$C = \begin{pmatrix} -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix},$$

mit wiederum (rekursiv)

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & d \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad 0 = 0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$D = \begin{pmatrix} -2 & b & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A^T) \\ &= \det \begin{pmatrix} a & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(*)}{=} a \cdot \det(C) \\ &= a \cdot \det \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(*)}{=} a \cdot \det(D) \cdot \det(F) \\ &= a \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & b & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{E.Z.}{=} a \cdot (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & b \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{pmatrix} \\ &= a \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & b \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{pmatrix} \\ &= a \cdot (-1) \cdot ((-2) \cdot 3 - b \cdot (-1)) \cdot ((-1) \cdot 2 - 1 \cdot c) \\ &= a \cdot (-1) \cdot (-6 - (-b)) \cdot (-2 - c) \\ &= a \cdot (-1) \cdot (-6 + b) \cdot (-2 - c) \\ &= a \cdot (-1) \cdot (b - 6) \cdot (-2 - c) \\ &= a \cdot (-1) \cdot (b - 6) \cdot (-1) \cdot (2 + c) \\ &= a \cdot (b - 6) \cdot (2 + c) \\ &= a \cdot (b - 6) \cdot (c + 2). \end{aligned}$$

**Dritte Variante mit dem Gauss-Verfahren:**

Es gilt

$$\det(A) = \det(A^T)$$

$$= \det \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{2.Z \leftrightarrow 4.Z}{=} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{4.Z - 2 \times (2.Z)}{=} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{3.Z \leftrightarrow 4.Z}{=} (-1) \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{6.Z + c \times (5.Z)}{=} (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+c \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c+2 \end{pmatrix}$$

$$= a \cdot (-1) \cdot (b-6) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (c+2) = a \cdot (-1) \cdot (b-6) \cdot (-1) \cdot (c+2)$$

$$= a \cdot (b-6) \cdot (c+2),$$

wie erwartet.

In der obigen Rechnung, haben wir auch verwendet, dass die Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt ihrer Diagonaleinträge ist (Vorlesungswoche 9), also

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{33} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & a_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$$

und, dass die Determinante das Vorzeichen wechselt, wenn wir in ihrem Argument (der Matrix) zwei Zeilen miteinander vertauschen (Vorlesungswoche 8), daher die Multiplikationen mit dem Faktor  $(-1)$ .

- (b) Die Matrix  $A$  ist singulär, genau dann wenn  $\det(A) = 0$  gilt, also wenn  $a = 0$  oder  $b = 6$  oder  $c = -2$ , weil

$$\det(A) = a \cdot (b - 6) \cdot (c + 2) = 0 \iff a = 0 \text{ oder } b = 6 \text{ oder } c = -2.$$

### 3. Cramer'sche Regel, 1750

Sei  $A$  eine reguläre  $n \times n$ -Matrix,  $b \in \mathbb{R}^n$  ein Spaltenvektor. Ersetzt man die  $k$ -te Spalte von  $A$  durch  $b$ , erhält man eine Matrix  $A_k$ . Beweisen Sie, dass die Lösung von  $Ax = b$  durch

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

gegeben ist.

*Bemerkung:* Bezüglich des Rechenaufwandes ist die Cramer'sche Regel eine im Vergleich zum Gaussverfahren ineffiziente Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

**Lösung:** Wenn wir die  $i$ -te Spalte von  $A$  mit  $a^{(i)}$  bezeichnen, können wir mit

$$A = (a^{(1)} \ a^{(2)} \ \dots \ a^{(n)}) = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)})$$

die Gleichung

$$b = Ax = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a^{(1)} \cdot x_1 + a^{(2)} \cdot x_2 + \dots + a^{(n)} \cdot x_n)$$



als

$$b = x_1 \cdot a^{(1)} + x_2 \cdot a^{(2)} + \dots + x_n \cdot a^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot a^{(i)}$$

umschreiben. Zudem gilt für die Rechnung mit Determinanten (Vorlesungswochen 8 und 9), dass

$$\begin{aligned} & \det \left( a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a^{(i)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)} \right) \\ &= \lambda_n \cdot \det \left( a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, a^{(n)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)} \right) \\ & \quad + \det \left( a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot a^{(i)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)} \right) \\ &= \lambda_n \cdot \det \left( a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, a^{(n)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)} \right) \\ & \quad + \lambda_{n-1} \cdot \det \left( a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, a^{(n-1)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)} \right) \\ & \quad + \det \left( a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \cdot a^{(i)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)} \right) \\ &= \dots \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \det \left( a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, a^{(i)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)} \right) \end{aligned}$$

und, dass die Determinante  $\det(M)$  einer Matrix  $M$ , welche zwei gleiche Zeilen besitzt, gleich Null ist ( $\det(M) = 0$ ), da die Matrix  $M$  nicht invertierbar ist (sie bekommt eine Nullzeile im Gauss-Verfahren).

Folglich gilt mit der Matrix

$$A_k = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, b, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)}),$$

dass

$$\begin{aligned} \det(A_k) &= \det \left( a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, b, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)} \right) \\ &= \det \left( a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, \sum_{i=1}^n x_i \cdot a^{(i)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \det \left( a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, a^{(i)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \delta_{ik} \cdot \det(A) \\ &= x_k \cdot \det(A), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \det(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, a^{(i)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)}) &= \delta_{ik} \cdot \det(A) \\ &= \begin{cases} \det(A), & \text{falls } i = k; \\ 0, & \text{falls } i \neq k \text{ (zwei gleiche Spalten)}. \end{cases} \end{aligned}$$

folgt, welche gilt, da

$$\begin{aligned} \det(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, a^{(i)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)}) &= \det\left(\left(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k-1)}, a^{(i)}, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)}\right)^T\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ \dots \\ a^{(k-1)} \\ a^{(i)} \\ a^{(k+1)} \\ \dots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} \det(A^T), & \text{falls } i = k; \\ 0, & \text{falls } i \neq k \text{ (zwei gleiche Zeilen)} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \det(A), & \text{falls } i = k; \\ 0, & \text{falls } i \neq k \end{cases} \\ &= \delta_{ik} \cdot \det(A). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j; \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

das Kronecker-Delta Symbol (Serie 4).

Nun gilt

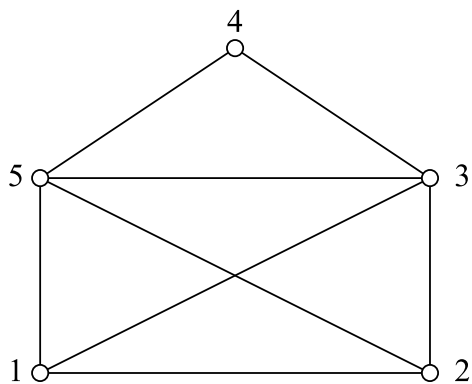
$$\det(A_k) = x_k \cdot \det(A) \iff x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

und somit haben wir die behauptete Formel gezeigt.

#### 4. Adjazenzmatrix und Laplace-Operator eines Graphen

Ein Graph  $G$  mit den Knoten  $1, 2, \dots, n$  wird vollständig durch seine Adjazenzmatrix  $A^G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  beschrieben, wobei der  $(i, j)$ -te Eintrag von  $A^G$  gegeben ist durch

$$(A^G)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \text{ mit } j \text{ durch eine Kante verbunden ist;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Beispielsweise gehört zum untenstehenden Graph  $G$

die Adjazenzmatrix

$$A^G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei  $d_i$  der Grad des Knotens  $i$ , d.h. die Anzahl seiner Nachbarn, und

$$D^G = \text{diag}(d_1, d_2, d_3, \dots, d_n).$$

Dann heisst die Matrix

$$L^G := D^G - A^G$$

Laplace-Operator auf  $G$ .

- Zeigen Sie für beliebige  $G$ , dass  $\det(L^G) = 0$  gilt.
- Kirchhoff's Matrix-Tree-Theorem besagt, dass jeder Kofaktor von  $L^G$  die Anzahl der  $G$  aufspannenden Teilbäume ist. Man berechne diese Anzahl für das obige Beispiel.

**Lösung:**

- Nach Definition gilt für den Grad des Knotens  $i$  (= die Anzahl Nachbarn des Knotens  $i$ ) die Formel

$$d_i = \sum_{j=1}^n (A^G)_{ij},$$

da sich in der  $i$ -ten Zeile der Adjazenzmatrix  $A^G$  nur Einseinträge (bei Nachbarn vom Knoten  $i$ ) und Nulleinträge (bei Nicht-Nachbarn vom Knoten  $i$ ) befinden. Daher summiert die Formel  $d_i = \sum_{j=1}^n (A^G)_{ij}$  alle Nachbarn des Knotens  $i$ , welche sich in der  $i$ -ten

Zeile befinden, auf und zählt somit die Nachbarn des Knotens  $i$  oder äquivalent dazu den Grad des Knotens  $i$ .

Folglich ist die  $i$ -te Zeilensumme von

$$L^G := D^G - A^G$$

für alle Knoten  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  gleich 0, weil

$$\begin{aligned} i\text{-te Zeilensumme}(L^G) &= i\text{-te Zeilensumme}(D^G - A^G) \\ &= i\text{-te Zeilensumme}(D^G) - i\text{-te Zeilensumme}(A^G) \\ &= i\text{-te Zeilensumme} \left[ \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \right] - \sum_{j=1}^n (A^G)_{ij} \\ &= d_i - d_i \\ &= 0 \quad \text{für alle Knoten } i = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Das heisst

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine nicht-triviale Lösung von

$$L^G x = 0,$$

weil

$$L^G \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n (L^G)_{1,j} \\ \sum_{j=1}^n (L^G)_{2,j} \\ \sum_{j=1}^n (L^G)_{3,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n (L^G)_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\text{-te Zeilensumme}(L^G) \\ 2\text{-te Zeilensumme}(L^G) \\ 3\text{-te Zeilensumme}(L^G) \\ \vdots \\ n\text{-te Zeilensumme}(L^G) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Daraus folgt, dass die Matrix  $L^G$  singularär ist und daher  $\det(L^G) = 0$  gilt, da

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

ebenfalls eine Lösung von  $L^G x = 0$  ist und daher die Lösung von  $L^G x = 0$  nicht eindeutig bestimmt ist. Somit ist  $L^G$  nicht invertierbar und daher gilt  $\det(L^G) = 0$ .

(b) Der Graph G ist gegeben durch das folgende (Knoten und Kanten) Schema:

Knoten	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	1
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	1	1
4	0	0	1	0	1
5	1	1	1	1	0

(\*)

Hierbei bedeutet ein  $(i, j)$ -ter Eintrag von 1, dass der Knoten  $i$  mit dem Knoten  $j$  durch eine Kante verbunden ist und ein  $(i, j)$ -ter Eintrag von 0 bedeutet, dass der Knoten  $i$  nicht durch eine Kante mit dem Knoten  $j$  verbunden ist.

Im gegebenen Graphen G ist ein Knoten nie mit sich selber durch eine Schlaufe (=Kante zu sich selbst) verbunden.

Das obige Schema des Graphen G ist äquivalent zur Adjazenzmatrix  $A^G$  vom Graphen G.

Wir haben die Adjazenzmatrix

$$A^G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es gilt mit der Notation

$$(i, j) = \text{Knoten } i \text{ ist mit Knoten } j \text{ verbunden,}$$

was aus dem obigen Schema (\*) oder der obigen Adjazenzmatrix  $A^G$  direkt ablesbar ist und der "Zählfunktion"  $|\{\cdot\}|$  der Element einer Menge  $\{\cdot\}$ , dass

$$\begin{aligned} d_1 &= |\{(1, 2), (1, 3), (1, 5)\}| = 3, \\ d_2 &= |\{(2, 1), (2, 3), (2, 5)\}| = 3, \\ d_3 &= |\{(3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5)\}| = 4, \\ d_4 &= |\{(4, 3), (4, 5)\}| = 2, \\ d_5 &= |\{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}| = 4, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
 D^G &= \text{diag}(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \\
 &= \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

In diesem Fall des Graphen G gilt

$$\begin{aligned}
 L^G &= D^G - A^G \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Nach Kirchhoff's Matrix-Tree-Theorem reicht es, irgendeinen Kofaktor auszurechnen. Um mit einer Untermatrix von

$$L^G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

mit möglichst vielen Nulleinträgen zu arbeiten, wählen wir den (3,3)-Kofaktor  $\tilde{a}_{33}$  aus, welcher durch streichen der 3. Zeile und 3. Spalte von  $L^G$  mit anschließender Determinantenbildung multipliziert mit der Gewichtung  $(-1)^{3+3}$  entsteht (Definition in der Vorlesungswoche 8).

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_{33} &= (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & \cancel{-1} & 0 & -1 \\ -1 & 3 & \cancel{-1} & 0 & -1 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{4} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 0 & 0 & \cancel{-1} & 2 & -1 \\ -1 & -1 & \cancel{-1} & -1 & 4 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{1.Z \leftrightarrow 4.Z}{=} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{(-1) \times (1.Z)}{=} (-1) \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{2.Z+1.Z}{\stackrel{4.Z-3 \times (1.Z)}{=}} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 11 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{4.Z+2.Z}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{4.Z+3.Z}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \\
 &= 40.
 \end{aligned}$$

Folglich hat der Graph  $G$  genau 40 aufspannende Bäume.

In der obigen Rechnung haben wir im fünften Schritt benutzt, dass Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor  $(-1)$  die Determinante um denselben Faktor  $(-1)$  ändert (folgt aus der Vorlesungswoche 8).