

# Lösungen Ferienserie

Diese Ferienserie hat kein Abgabedatum und wird nicht korrigiert. Die Lösungen werden Mitte Januar veröffentlicht.

1. Finden Sie ein Erzeugendensystem des Lösungsraumes  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5$  des Systems

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

**Lösung:** Wir schreiben das System in Matrixform als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den Lösungsraum finden wir mit Gauss-Elimination:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccccc|} \hline 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{2.Z-3 \times (1.Z)} \\ \xrightarrow{3.Z-1.Z} \end{array} & \begin{array}{|ccccc|} \hline 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccccc|} \hline 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{3.Z - \frac{2}{7} \times (2.Z)} \\ \xrightarrow{4.Z + 3.Z} \end{array} & \begin{array}{|ccccc|} \hline 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ \hline \end{array} \quad (*) \end{array}$$

Wähle nun  $x_5 = \alpha \in \mathbb{R}$  beliebig, da (\*) in der untersten Zeile zwei Einträge besitzt. Aus der letzten Zeile von (\*) wissen wir, dass

$$\frac{6}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_5 = 0$$

und es folgt

$$x_4 = \frac{7}{6} \cdot \left( \frac{2}{7}x_5 \right) = \frac{x_5}{3} = \frac{\alpha}{3}.$$

Weiter folgt aus der 3. Zeile, 2. Zeile und 1. Zeile von (\*), dass

$$\begin{aligned}
 -x_3 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_5 = 0 &\implies x_3 = -\frac{1}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_5 = -\frac{1}{7} \cdot \frac{\alpha}{3} - \frac{2}{7}\alpha = -\frac{1}{21}\alpha - \frac{6}{21}\alpha = -\frac{7}{21}\alpha = -\frac{\alpha}{3}, \\
 -7x_2 + 7x_3 - 10x_4 + 8x_5 = 0 &\implies x_2 = \frac{1}{7}(7x_3 - 10x_4 + 8x_5) = \frac{1}{7} \underbrace{\left(-\frac{7}{3}\alpha - \frac{10}{3}\alpha + \frac{24}{3}\alpha\right)}_{=\frac{7}{3}\alpha} = \frac{\alpha}{3}, \\
 x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 &\implies x_1 = -2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = -\frac{2}{3}\alpha - \frac{\alpha}{3} - \frac{3}{3}\alpha + \frac{3}{3}\alpha = -\alpha
 \end{aligned}$$

und die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des Systems ist somit gegeben durch

$$\mathcal{L} = \left\{ \left( \begin{array}{c} -\alpha \\ \frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3} \\ \alpha \end{array} \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ein mögliches Erzeugendensystem des Lösungsraums  $\mathcal{L}$  ist also gegeben durch den Vektor

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

sowie nichttriviale Vielfache davon, da

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ \frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3} \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**2.** Betrachten Sie die folgenden Unterräume von  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{aligned}
 U &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}, \\
 V &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, x_1 = x_4\}.
 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem von

(a)  $U$ ,

(b)  $V$ ,

(c)  $U \cap V$ .

**Lösung:**

(a)  $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$ . Man kann also  $x_1$ ,  $x_3$  und  $x_4$  als freie Parameter wählen. Damit ist  $x_2 = 2x_3 - x_4$ . Man kann  $U$  also schreiben als

$$U = \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:a^{(1)}} + x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:a^{(2)}} + x_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:a^{(3)}}. \end{aligned}$$

Die Vektoren  $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$  sind offensichtlich ein Erzeugendensystem für  $U$ . Sie bilden sogar eine Basis für  $U$ , da der Vektorraum  $U$  dreidimensional ist, weil er von den drei Variablen  $x_1$ ,  $x_3$  und  $x_4$  abhängt.

(b)  $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, x_1 = x_4\}$ . Man kann also  $x_3$  und  $x_4$  als freie Parameter wählen. Aus  $x_1 = x_4$  folgt  $x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = x_2 - 2x_3 = 0 \implies x_2 = 2x_3$ . Also gilt

$$V = \left\{ \left( \begin{array}{c} x_4 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wie in (a) sieht man, dass  $b^{(1)}, b^{(2)}$  ein Erzeugendensystem von  $V$  bildet mit

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_4 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= x_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:b^{(1)}} + x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:b^{(2)}}. \end{aligned}$$

Dieses Erzeugendensystem bildet sogar eine Basis für  $V$ , da der Vektorraum  $V$  zwei-dimensional ist, weil er von den zwei Variablen  $x_3$  und  $x_4$  abhängt.

- (c) Für den Vektorraum  $U \cap V$  werden alle drei Bedingungen (i), (ii) und (iii) von  $U$  und  $V$  zusammengenommen und wir erhalten

$$U \cap V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \underbrace{x_2 - 2x_3 + x_4 = 0}_{(i)}, \underbrace{x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0}_{(ii)}, \underbrace{x_1 = x_4}_{(iii)} \right\}.$$

Es folgt

$$x_1 = x_4 \implies x_2 \stackrel{(ii)}{=} 2x_3 \implies x_4 \stackrel{(i)}{=} 2x_3 - x_2 = 2x_3 - 2x_3 = 0 \stackrel{(iii)}{\implies} x_1 = 0.$$

Somit kann nur die Variable  $x_3$  als freier Parameter gewählt werden. Damit folgt

$$U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:c^{(1)}} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

und daraus ergibt sich, dass der Vektor

$$c^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von  $U \cap V$  darstellt.

Dieses Erzeugendensystem bildet sogar eine Basis für  $U \cap V$ , da der Vektorraum  $U \cap V$  eindimensional ist, weil er nur von der Variablen  $x_3$  abhängt.

3. Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen mit dem Gaussverfahren, ob die folgenden Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^4$  linear abhängig, linear unabhängig und ob sie erzeugend sind:

(a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .      (b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(c)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .      (d)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Lösung:** Betrachte die  $k$  Vektoren  $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$  im Vektorraum  $V$ . Dann gilt

$a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$  sind **linear unabhängig**, falls aus  $x_1 a^{(1)} + \dots + x_k a^{(k)} = 0$  folgt, dass  $x_1 = \dots = x_k = 0$  gilt.

Sonst heissen die Vektoren  $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$  **linear abhängig**. Falls jeder Vektor  $b$  von  $V$  als Linearkombination der Vektoren  $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$  dargestellt werden kann, sind die Vektoren  $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$  **erzeugend**.

In dieser Aufgabe ist  $V = \mathbb{R}^n$  mit  $n = 3$  oder  $n = 4$  und wir können die Bestimmung von der linearen Abhängigkeit usw. mit Hilfe vom Gaussverfahren systematisieren:

Schreibe  $A = (a^{(1)} \dots a^{(k)})$ .  $A$  ist eine  $n \times k$ -Matrix, wobei  $n$  die Anzahl Zeilen ist. Mit dem Gauss-Schema können wir  $r = \text{Rang}(A)$  finden.

Es gilt: die Vektoren  $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$  sind:

- linear unabhängig, falls  $r = k$ .
- linear abhängig, falls  $r < k$ .
- erzeugend, falls  $r = n$ .

(a) Wir berechnen

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow[3.Z-1.Z]{2.Z-1.Z} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \text{ und damit gilt } n = 3, k = 2, r = 1.$$

Da  $r < k$  gilt, sind die Vektoren linear abhängig und da  $r \neq n$  ist, sind sie nicht erzeugend.

(b) Wir berechnen

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & -1 & 1 \\ \hline -2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow[4.Z+2 \times (1.Z)]{2.Z-2 \times (1.Z), 3.Z-3 \times (1.Z)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 3 & -1 \\ \hline 0 & 2 & -2 \\ \hline 0 & -1 & 3 \\ \hline \end{array} \xrightarrow[4.Z+\frac{1}{3} \times (2.Z)]{3.Z-\frac{2}{3} \times (2.Z)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 3 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ \hline 0 & 0 & \frac{10}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{4.Z+2 \times (3.Z)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 3 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

und damit gilt  $n = 4$ ,  $k = 3$  und  $r = 3$ .

Da  $r = k$  sind die Vektoren linear unabhängig und da  $r \neq n$  sind sie nicht erzeugend.

(c) Wir berechnen

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2.Z - \frac{2}{3} \times (1.Z) \\ 3.Z - \frac{1}{3} \times (1.Z)}} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{16}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{3.Z - \frac{16}{14} \times (2.Z)} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{18}{7} \end{bmatrix}$$

und damit gilt  $n = 3$ ,  $k = 3$  und  $r = 3$ .

Da  $r = k$  gilt sind die Vektoren linear unabhängig und da  $r = n$  gilt auch erzeugend.

Das heisst, diese drei Vektoren bilden eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ .

(d) Wir berechnen

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2.Z+1.Z \\ 3.Z+1.Z}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3.Z-2.Z} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

und damit gilt  $n = 3$ ,  $k = 4$  und  $r = 3$ .

Da  $r < k$  sind die Vektoren linear abhängig und da  $r = n$  gilt sind sie erzeugend.

4. Es seien

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

mit  $\binom{x}{0} := 1$  die Binomialpolynome.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge  $\{\binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2\}$  im Vektorraum aller Polynome linear unabhängig ist.

(b)  $P_2$  bezeichne den Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$ . Zeigen Sie, dass

$$P_2 = \text{span} \left\{ \binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2 \right\}.$$

(c) Bestimmen Sie eine Matrix  $A \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  so, dass

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 = a_0 \binom{x}{0} + a_1 \binom{x}{1} + a_2 \binom{x}{2}$$

gilt, wenn

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

**Hinweis:** Die Aufgabe (c) kann entweder durch direkte Rechnung gelöst werden oder mit Hilfe der diskreten Taylor-Formel, welche für ein Polynom  $p(x)$  vom Grad  $n$  besagt, dass

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \Delta^k p(0) \binom{x}{k},$$

wobei  $\Delta^0 p(x) := p(x)$ ,  $\Delta^1 p(x) := p(x+1) - p(x)$  und  $\Delta^k p(x) := \Delta^1(\Delta^{k-1} p(x))$  die diskreten Differenzenoperatoren sind.

**Lösung:**

(a) Seien  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  reelle Zahlen mit

$$\begin{aligned} a_0 \underbrace{\binom{x}{0}}_{=1} + a_1 \underbrace{\binom{x}{1}}_{=x} + a_2 \underbrace{\binom{x}{2}}_{=\frac{x(x-1)}{2}} &= 0 \\ \iff a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-1)}{2} &= 0 \\ \iff a_0 + \left(a_1 - \frac{a_2}{2}\right) x + \frac{a_2}{2} x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich zeigt, dass  $a_0 = 0$ ,  $a_2 = 0 \implies a_1 = 0$  gilt und damit muss  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$  gelten, damit die Gleichung stimmt. Folglich sind die  $\binom{x}{k}$  für  $0 \leq k \leq 2$  linear unabhängig und dies gilt sogar für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .

(b) Sei  $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in P_2$  mit  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$  ein allgemeines Polynom in  $P_2$ . Wir suchen reelle Zahlen  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , sodass

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = a_0 \underbrace{\binom{x}{0}}_{=1} + a_1 \underbrace{\binom{x}{1}}_{=x} + a_2 \underbrace{\binom{x}{2}}_{=\frac{x(x-1)}{2}}$$

gilt. Dies ist (vergleiche mit Teil **(a)**) äquivalent zu

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = a_0 + \left(a_1 - \frac{a_2}{2}\right) x + \frac{a_2}{2} x^2.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_2 &= \frac{a_2}{2}, \\ b_1 &= a_1 - \frac{a_2}{2} = a_1 - b_2 \end{aligned}$$

folgt, dass die Gleichung für

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1 + b_2, \quad a_2 = 2b_2$$

erfüllt ist. Dies zeigt, dass

$$P_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix} : 0 \leq k \leq 2 \right\}$$

gilt.

(c) Aus Teil (b) wissen wir, dass die Gleichungen

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1 + b_2, \quad a_2 = 2b_2$$

gelten und daher muss die gesuchte Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 + b_2 \\ 2b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_0 + a_{12}b_1 + a_{13}b_2 \\ a_{21}b_0 + a_{22}b_1 + a_{23}b_2 \\ a_{31}b_0 + a_{32}b_1 + a_{33}b_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

lauten.

Es folgt erneut mittels eines Koeffizientenvergleichs, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Bedingung erfüllt.

5.

(a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren mit Begründung eine Basis für  $\mathbb{R}^3$  aus.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ 3-c \end{pmatrix}.$$

Wie hängt die Dimension des von diesen Vektoren aufgespannten Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?



## Lösung:

- (a) Eine Basis besteht aus erzeugenden und linear unabhängigen Vektoren. Es muss also gelten, dass  $r = k = n = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , wobei  $r = \text{Rang}(A)$  ist mit der Matrix  $A = (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$  bestehend aus drei dieser sechs gegebenen Vektoren.

Wir schreiben nun alle sechs Vektoren in eine Matrix und wenden den Gauss-Algorithmus auf diese Matrix an und rechnen

$$\begin{array}{|cccccc|} \hline 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow[\substack{2.Z-2 \times (1.Z) \\ 3.Z-1.Z}]{\substack{2.Z-2 \times (1.Z) \\ 3.Z-1.Z}} \begin{array}{|cccccc|} \hline 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -8 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{3.Z-2.Z} \begin{array}{|cccccc|} \hline 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ \hline \end{array} (*)$$

Aus (\*) sehen wir, dass wir z.B. die Pivot-Vektoren oben an den Stellen 1, 2, 4 als Basis wählen können und erhalten daher als gesuchte Basis von  $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir können statt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  (gegeben an der 2. Stelle oben) aber auch den Vektor  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

an der 3. Stelle oben nehmen, sowie einer der Vektoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$  oder  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (gegeben

an den Stellen 5 und 6 oben) anstatt  $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  (gegeben an der 4. Stelle oben).

- (b) Sei  $U$  der von den drei Vektoren aufgespannte Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ . Die Dimension  $\dim(U)$  von  $U$  ist gleich der Anzahl Vektoren, die in  $U$  eine Basis bilden. Schreibe nun die drei gegebenen Vektoren in einer einzigen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass gilt:

*Die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren von  $A$  ist gleich*

$$r = \text{Rang}(A).$$

Eine Basis von  $U$  kann also höchstens aus  $r$  Vektoren bestehen (sonst sind sie nicht mehr linear unabhängig und bilden keine Basis). Es gilt also  $d := \dim(U) \leq r$ .

Wegen dem Satz 4.3 (i) aus dem Buch “K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage 2002” wissen wir zudem, dass mehr als  $d = \dim(U)$  Vektoren linear abhängig in  $U$  sind. Es folgt also, dass  $\dim(U) = \text{Rang}(A)$ , somit können wir die Dimension von  $U$  mit dem Gaußverfahren berechnen.

Dazu berechnen wir

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccc|} \hline a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{2.Z-1.Z} \\ \xrightarrow{3.Z-\frac{1+a}{a}\times(1.Z)} \end{array} & \begin{array}{|ccc|} \hline a & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & 3-c+\frac{(1+a)c}{a} \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{3.Z-\frac{2}{b}\times(2.Z)} & \begin{array}{|ccc|} \hline a & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3-c+\frac{(1+a)c}{a} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Um die obigen Matrixmanipulationen durchzuführen benötigen wir, dass  $a \neq 0$  und dass  $b \neq 0$ . Daher müssen wir Fallunterscheidungen machen.

Fall  $a = b = 0$ : Die obige Matrix vereinfacht sich und wir rechnen

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c \\ 1 & 2 & 3-c \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{1.Z\leftrightarrow 3.Z} & \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 3-c \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{3.Z-2.Z} & \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 3-c \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

- Falls  $c = 0$ , gilt  $\dim(U) = r = 1$ ,
- falls  $c \neq 0$ , gilt  $\dim(U) = r = 2$ .

Fall  $a = 0, b \neq 0$ : Wir unterscheiden die zwei Fälle

- für  $c = 0$  vereinfacht sich die Matrix und es gilt

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{1.Z\leftrightarrow 3.Z} & \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 3 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \text{ und damit gilt } \dim(U) = r = 2,$$

- für  $c \neq 0$  gilt

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 0 & -c \\ 0 & b & -c \\ 1 & 2 & 3-c \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{1.Z\leftrightarrow 3.Z} & \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 3-c \\ 0 & b & -c \\ 0 & 0 & -c \\ \hline \end{array} \end{array} \text{ und damit gilt } \dim(U) = r = 3.$$

Fall  $a \neq 0$ :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccc|} \hline a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{2.Z-1.Z} \\ \xrightarrow{3.Z-\frac{1+a}{a}\times(1.Z)} \end{array} & \begin{array}{|ccc|} \hline a & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & 3+\frac{c}{a} \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{2.Z\leftrightarrow 3.Z} & \begin{array}{|ccc|} \hline a & 0 & -c \\ 0 & 2 & 3+\frac{c}{a} \\ 0 & b & 0 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{3.Z-\frac{b}{2}\times(2.Z)} & \begin{array}{|ccc|} \hline a & 0 & -c \\ 0 & 2 & 3+\frac{c}{a} \\ 0 & 0 & -\frac{(3a+c)b}{2a} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- Falls  $-\frac{(3a+c)b}{2a} = 0$ , also falls  $b = 0$  oder  $c = -3a$ :  $\dim(U) = r = 2$ ,

- falls  $\frac{(3a+c)b}{2a} \neq 0 : \dim(U) = r = 3$ .

6. Gegeben sei die Basis  $\mathcal{B} = \{b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}\}$  für  $\mathbb{R}^3$ , wobei

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Betrachten Sie den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Finden Sie die Koordinaten  $y_1, y_2, y_3$ , die  $x$  in der Basis  $\mathcal{B}$  beschreiben, d.h.

$$x = y_1 b^{(1)} + y_2 b^{(2)} + y_3 b^{(3)}.$$

(b) Es sei nun  $v \in \mathbb{R}^3$  der Vektor mit Koordinaten  $(1, -2, 2)^\top$  in der Basis  $\mathcal{B}$ . Bestimmen Sie die Koordinaten von  $v$  bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{E} = \{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}$ .

**Lösung:**

(a) Wir suchen  $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$  so, dass  $x = y_1 b^{(1)} + y_2 b^{(2)} + y_3 b^{(3)}$ , d.h.

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} &= y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =: Ty. \end{aligned}$$

Man löst nun die Gleichung  $x = Ty$  mit dem Gauss-Algorithmus und rechnet

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{2.Z+1.Z} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{2.Z \leftrightarrow 3.Z} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right]$$

und daraus folgt nun

3. Zeile von (\*):  $3y_3 = -3 \implies y_3 = -1$ ,
2. Zeile von (\*):  $2y_2 - 3y_3 = -1 \implies 2y_2 = -4 \implies y_2 = -2$ ,
1. Zeile von (\*):  $y_1 + y_2 + y_3 = 1 \implies y_1 = 4$ .

Das heisst, der Vektor  $x$  hat bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$  die Koordinaten

$$x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Sei  $v$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$  durch die Koordinaten  $(1, -2, 2)^\top$  dargestellt. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} v &= 1 \cdot b^{(1)} - 2 \cdot b^{(2)} + 2 \cdot b^{(3)} \\ &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2 + 2 \\ -1 + 2 + 4 \\ 0 - 4 - 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist bereits die Darstellung des Vektors  $v$  bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{E} = \{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}$ , da die drei Vektoren  $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$  alle bezüglich dieser Standardbasis  $\mathcal{E}$  gegeben sind.

7. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie den Rang von  $A$ .
- (b) Ermitteln Sie eine Basis für den von den Spaltenvektoren erzeugten Unterraum von  $\mathbb{R}^4$ . Bestimmen Sie die Koordinaten der Spaltenvektoren in dieser Basis.

**Lösung:** Wenn wir Zeilen einer Matrix transponieren, werden sie zu Spalten. Deshalb betrachtet man hier am besten die Matrix  $A^T$ , weil in der Aufgabenstellung im Teil (b) nach den Spalten gefragt wird und wir für (b) den Teil (a) verwenden möchten. Wir wenden daher das Gauss-Verfahren auf die Matrix  $A^T$  an und rechnen

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & -7 & -7 \\ -3 & -4 & -3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2.Z-3 \times (1.Z) \\ 3.Z-1 \cdot Z \\ 4.Z+2 \times (1.Z) \\ 5.Z+3 \times (1.Z)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{3.Z-2 \times (2.Z) \\ 4.Z-2 \cdot Z \\ 5.Z+2 \cdot Z}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (*) \end{aligned}$$

- (a) Folglich gilt  $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T) = 2$ , da  $(*)$  zwei Pivotstellen besitzt.
- (b) Wir können die Pivot-Zeilen 1 und 2 von  $A^T$  als Basis  $\mathcal{B}$  des betrachteten Vektorraumes wählen (da Zeilen unter Transposition wieder zu den ursprünglichen Zeilen werden), d. h.

$$\mathcal{B} = \left\{ b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = b_1 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = b_2.$$

Aus den obigen Schritten des Gauss-Verfahrens können wir zudem ablesen, dass in der Basis  $\mathcal{B}$  gilt, dass

$$\begin{aligned} \text{Aus } 3.Z - 1.Z - 2 \times (m2.Z) = 0 : \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - b_1 - 2(b_2 - 3b_1) = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -5b_1 + 2b_2, \\ \text{Aus } 4.Z + 2 \times (1.Z) - m2.Z = 0 : \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} + 2b_1 - (b_2 - 3b_1) = 0 &\iff \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} = -5b_1 + b_2, \\ \text{Aus } 5.Z + 3 \times (1.Z) + m2.Z = 0 : \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} + 3b_1 + (b_2 - 3b_1) = 0 &\iff \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = -b_2. \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass wir im obigen Gauss-Verfahren die zweite Zeile mit  $2.Z - 3 \times (1.Z)$  manipuliert haben und deshalb haben: manipulierte  $m2.Z = b_2 - 3b_1$ .

## 8. Durch die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \\ p_2(t) &= t^3 + 6t - 5, \\ p_3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1, \\ p_4(t) &= 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5 \end{aligned}$$

wird ein Vektorraum  $V$  erzeugt. Bestimmen Sie  $\dim(V)$  und eine Basis von  $V$ .

**Lösung:** Die entsprechende Koeffizientenmatrix  $A$ , welche zu den gegebenen vier Polynomen gehört, ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauss-Algorithmus findet man

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2.Z-1.Z \\ 3.Z-2 \times (1.Z) \\ 4.Z-2 \times (1.Z)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.Z = \frac{1}{2} \times (2.Z)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{3.Z-2.Z \\ 4.Z+2.Z}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (*).$$

Folglich gilt  $\dim(V) = \text{Rang}(A) = 2$  und eine mögliche Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ist diejenige, die den nichttrivialen Zeilen der reduzierten Matrix (\*) entspricht, das heisst die Polynome, welche den obigen reduzierten Pivotzeilen 1 und 2 von (\*) entsprechen, also

$$\mathcal{B} = \{t^3 - 2t^2 + 4t + 1, t^2 + t - 3\}.$$

Eine andere mögliche Basis  $\mathcal{B}^*$  von  $V$  ist diejenige, die den nichttrivialen Zeilen der ursprünglichen Matrix entspricht, das heisst die Polynome, welche den Pivotzeilen 1 und 2 entsprechen (dies sind  $p_1(t)$  und  $p_2(t)$ ), also

$$\mathcal{B}^* = \{t^3 - 2t^2 + 4t + 1, t^3 + 6t - 5\}.$$

9.

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3 - 6a & -6 + 5a \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche Werte des Parameters  $a$  besitzt die Matrix eine Inverse  $A^{-1}$ ?

**Lösung:** Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn man Gauss-Schritte ausführt. Wir bringen  $A$  also in Zeilenstufenform mit dem Gauss-Verfahren und rechnen dazu

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3-6a & -6+5a \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 2.Z-2 \times (1.Z) \\ 3.Z-3 \times (1.Z) \\ 4.Z+1.Z \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 2.Z-2 \times (1.Z) \\ 3.Z-3 \times (1.Z) \\ 4.Z+1.Z \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & 2-6a & -4+5a \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 3.Z-2.Z \\ 4.Z+2 \times (2.Z) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 3.Z-2.Z \\ 4.Z+2 \times (2.Z) \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -6a & 6+5a \end{pmatrix} \xrightarrow{4.Z+2a \times (3.Z)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6+a \end{pmatrix} \cdot (*) \end{aligned}$$

- (a) Die Determinante dieser Dreiecksmatrix  $(*)$  ist das Produkt der Diagonalelemente, also  $\det(*) = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot (6+a) = 180 + 30a$ .

Zudem gilt, da das Gauss-Verfahren die Determinante einer Matrix nicht ändert, dass

$$\det(A) = \det(*) = 180 + 30a.$$

- (b) Die Matrix  $A$  hat eine Inverse  $A^{-1}$  für alle  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$ , das heisst für alle reellen Werte  $a \neq -6$ , denn eine Matrix  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante  $\det(A)$  nicht Null ist und es gilt

$$\det(A) = 180 + 30a = 0 \iff a = -6.$$

10. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem mit dem reellen Parameter  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} (2-\alpha)x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_2 - (2-\alpha)x_3 &= -4 \\ (3-\alpha)x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Für welche  $\alpha$  besitzt dieses Gleichungssystem genau eine, unendlich viele, keine Lösung? Zu denjenigen  $\alpha$ , für die das Gleichungssystem lösbar ist, bestimme man die Lösungsmenge.

**Lösung:** Die Determinante der zum obigen Gleichungssystem gehörenden Matrix ist gleich

$$(2-\alpha) \cdot (2-5\alpha+\alpha^2)$$

- man entwickle z.B. nach der ersten Spalte mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz und rechnet

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -(2-\alpha) \\ 0 & 3-\alpha & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot (2-\alpha) \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & -(2-\alpha) \\ 3-\alpha & 1 \end{pmatrix} + 0 + 0 \\ &= (2-\alpha) \cdot (-4 \cdot 1 - (-(2-\alpha)) \cdot (3-\alpha)) \\ &= (2-\alpha) \cdot (-4 + (2-\alpha) \cdot (3-\alpha)) \\ &= (2-\alpha) \cdot (-4 + 6 - 2\alpha - 3\alpha + \alpha^2) \\ &= (2-\alpha) \cdot (2-5\alpha+\alpha^2). \end{aligned}$$

Das System ist genau dann eindeutig lösbar, wenn diese Determinante ungleich Null ist, also

$$(2 - \alpha) \cdot (2 - 5\alpha + \alpha^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ oder } \alpha = \frac{-(-5) - \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{5 - \sqrt{25 - 8}}{2} = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{oder } \alpha = \frac{-(-5) + \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{5 + \sqrt{25 - 8}}{2} = \frac{5 + \sqrt{17}}{2},$$

wobei wir die Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ oder } x = x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

für quadratische Gleichungen verwendet haben.

Damit hat das gegebene lineare Gleichungssystem für die Werte

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 2, \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \right\}$$

eine eindeutige Lösung und diese eindeutige Lösung ist gegeben durch

$$x_1 = x_2 = -\frac{2 + \alpha}{2 - 5\alpha + \alpha^2}, \quad x_3 = \frac{8 - 4\alpha}{2 - 5\alpha + \alpha^2}.$$

Um diese Lösung zu berechnen, wendet man den Gauss-Algorithmus auf die zum gegebenen

Gleichungssystem gehörende Matrix  $\begin{pmatrix} 2 - \alpha & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -(2 - \alpha) \\ 0 & 3 - \alpha & 1 \end{pmatrix}$  an und rechnet wie folgt

		$\begin{array}{ccc c} 2 - \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -(2 - \alpha) & -4 \\ 0 & 3 - \alpha & 1 & 1 \end{array}$	
$3.Z + \frac{3-\alpha}{4} \times (2.Z)$	$\xrightarrow{\quad}$	$\begin{array}{ccc c} 2 - \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -(2 - \alpha) & -4 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{(2-\alpha)(3-\alpha)}{4} & 1 - (3 - \alpha) \end{array}$	
$\xRightarrow{\quad}$	$\xrightarrow{\quad}$	$\begin{array}{ccc c} 2 - \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -(2 - \alpha) & -4 \\ 0 & 0 & \frac{4 - (6 - 5\alpha + \alpha^2)}{4} & -2 + \alpha \end{array}$	
$\xRightarrow{\quad}$	$\xrightarrow{\quad}$	$\begin{array}{ccc c} 2 - \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -(2 - \alpha) & -4 \\ 0 & 0 & \frac{-2 + 5\alpha - \alpha^2}{4} & -2 + \alpha \end{array}$	
$3.Z = -4 \times (3.Z)$	$\xrightarrow{\quad}$	$\begin{array}{ccc c} 2 - \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -(2 - \alpha) & -4 \\ 0 & 0 & 2 - 5\alpha + \alpha^2 & 8 - 4\alpha \end{array}$	$\cdot (*)$



Mit (\*) berechnet man nun durch Rückwärtseinsetzen die oben gegebene Lösung

$$\begin{aligned}
 (2 - 5\alpha + \alpha^2)x_3 = 8 - 4\alpha &\iff x_3 = \frac{8 - 4\alpha}{2 - 5\alpha + \alpha^2}, \\
 -4x_2 - (2 - \alpha)x_3 = -4 &\iff x_2 = -\frac{1}{4}(-4 + (2 - \alpha)x_3) = \frac{-4 + (2 - \alpha) \cdot \left(\frac{8 - 4\alpha}{2 - 5\alpha + \alpha^2}\right)}{4} \\
 &= \frac{4 \cdot (2 - 5\alpha + \alpha^2) - (2 - \alpha) \cdot (8 - 4\alpha)}{4 \cdot (2 - 5\alpha + \alpha^2)} \\
 &= \frac{(2 - 5\alpha + \alpha^2) - (2 - \alpha) \cdot (2 - \alpha)}{2 - 5\alpha + \alpha^2} \\
 &= \frac{2 - 5\alpha + \alpha^2 - (4 - 4\alpha + \alpha^2)}{2 - 5\alpha + \alpha^2} \\
 &= \frac{2 - 5\alpha + \alpha^2 - 4 + 4\alpha - \alpha^2}{2 - 5\alpha + \alpha^2} = \frac{-2 - \alpha}{2 - 5\alpha + \alpha^2} = -\frac{2 + \alpha}{2 - 5\alpha + \alpha^2}, \\
 (2 - \alpha)x_1 + x_2 + x_3 = 1 &\iff x_1 = \frac{1}{2 - \alpha}(1 - x_2 - x_3) \\
 &= \frac{1 - \left(\frac{8 - 4\alpha}{2 - 5\alpha + \alpha^2}\right) - \left(-\frac{2 + \alpha}{2 - 5\alpha + \alpha^2}\right)}{2 - \alpha} \\
 &= \frac{(2 - 5\alpha + \alpha^2) - (8 - 4\alpha) + (2 + \alpha)}{(2 - \alpha) \cdot (2 - 5\alpha + \alpha^2)} \\
 &= \frac{2 - 5\alpha + \alpha^2 - 8 + 4\alpha + 2 + \alpha}{(2 - \alpha) \cdot (2 - 5\alpha + \alpha^2)} \\
 &= \frac{-4 + \alpha^2}{(2 - \alpha) \cdot (2 - 5\alpha + \alpha^2)} \\
 &= \frac{(2 - \alpha) \cdot (-2 - \alpha)}{(2 - \alpha) \cdot (2 - 5\alpha + \alpha^2)} \\
 &= \frac{-2 - \alpha}{2 - 5\alpha + \alpha^2} = -\frac{2 + \alpha}{2 - 5\alpha + \alpha^2} = x_2.
 \end{aligned}$$

Es bleiben die drei Fälle  $\alpha = 2$ ,  $\alpha = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$ ,  $\alpha = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$  zu betrachten, in denen die Determinante des Gleichungssystems Null ist, also keine oder unendlich viele Lösungen zu erwarten sind.

(i) Setzt man  $\alpha = 2$  ein, so wird das gegebene Gleichungssystem zu

$$\begin{aligned}
 (2 - \alpha)x_1 + x_2 + x_3 &= x_2 + x_3 = 1 \\
 -4x_2 - (2 - \alpha)x_3 &= -4x_2 = -4 \iff x_2 = 1 \\
 (3 - \alpha)x_2 + x_3 &= x_2 + x_3 = 1 \implies x_3 = 0
 \end{aligned}$$

und man sieht leicht, dass  $x_1 \in \mathbb{R}$  beliebig sein kann, da die Variable  $x_1$  im System gar nicht mehr vorkommt - also unendlich viele Lösungen existieren - und  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 0$  gelten muss.

- (ii) Für den Wert  $\alpha = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ , existieren keine Lösungen - die zweite und dritte Gleichung werden unverträglich, da gilt

$$\begin{aligned}
 -4x_2 - (2 - \alpha)x_3 = -4 &\iff -8x_2 - (4 - 2\alpha)x_3 = -8 \\
 \implies x_2 &= \frac{-8 + (4 - 2\alpha)x_3}{-8} = \frac{-8 + (4 - 5 + \sqrt{17})x_3}{-8} \\
 &= \frac{-8 + (-1 + \sqrt{17})x_3}{-8}, \\
 (3 - \alpha)x_2 + x_3 = 1 &\implies x_2 = \frac{1 - x_3}{3 - \alpha} = \frac{2 - 2x_3}{6 - 2\alpha} = \frac{2 - 2x_3}{6 - 5 + \sqrt{17}} = \frac{2 - 2x_3}{1 + \sqrt{17}} \\
 &= \frac{(2 - 2x_3) \cdot (1 - \sqrt{17})}{1 - 17} = \frac{(2 - 2x_3) \cdot (1 - \sqrt{17})}{-16} \\
 &= \frac{(1 - x_3) \cdot (1 - \sqrt{17})}{-8} = \frac{(1 - \sqrt{17}) - (1 - \sqrt{17})x_3}{-8} \\
 &= \frac{(1 - \sqrt{17}) + (-1 + \sqrt{17})x_3}{-8} \neq x_2 \text{ vorher} \implies \text{Widerspruch.}
 \end{aligned}$$

- (iii) Für den Wert  $\alpha = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ , existieren ebenfalls keine Lösungen - die zweite und dritte Gleichung werden unverträglich, da gilt

$$\begin{aligned}
 -4x_2 - (2 - \alpha)x_3 = -4 &\iff -8x_2 - (4 - 2\alpha)x_3 = -8 \\
 \implies x_2 &= \frac{-8 + (4 - 2\alpha)x_3}{-8} = \frac{-8 + (4 - 5 - \sqrt{17})x_3}{-8} \\
 &= \frac{-8 + (-1 - \sqrt{17})x_3}{-8}, \\
 (3 - \alpha)x_2 + x_3 = 1 &\implies x_2 = \frac{1 - x_3}{3 - \alpha} = \frac{2 - 2x_3}{6 - 2\alpha} = \frac{2 - 2x_3}{6 - 5 - \sqrt{17}} = \frac{2 - 2x_3}{1 - \sqrt{17}} \\
 &= \frac{(2 - 2x_3) \cdot (1 + \sqrt{17})}{1 - 17} = \frac{(2 - 2x_3) \cdot (1 + \sqrt{17})}{-16} \\
 &= \frac{(1 - x_3) \cdot (1 + \sqrt{17})}{-8} = \frac{(1 + \sqrt{17}) - (1 + \sqrt{17})x_3}{-8} \\
 &= \frac{(1 + \sqrt{17}) + (-1 - \sqrt{17})x_3}{-8} \neq x_2 \text{ vorher} \implies \text{Widerspruch.}
 \end{aligned}$$

**11.** Für welche reellen Werte von  $s$  und  $t$  hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 x + sy + s^2z &= 1 \\
 s^2x + y + 2tz &= 1 \\
 sx + s^2y + z &= t
 \end{aligned}$$

keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils auch die Lösungsmenge.

**Lösung:** Die Determinante der Koeffizientenmatrix  $\begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s^2 & 1 & 2t \\ s & s^2 & 1 \end{pmatrix}$  ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s^2 & 1 & 2t \\ s & s^2 & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ s^2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot s \cdot \det \begin{pmatrix} s^2 & 2t \\ s & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot s^2 \cdot \det \begin{pmatrix} s^2 & 1 \\ s & s^2 \end{pmatrix} \\ &= (1 - 2ts^2) - s \cdot (s^2 - 2ts) + s^2 \cdot (s^4 - s) \\ &= 1 - 2ts^2 - s^3 + 2ts^2 + s^6 - s^3 \\ &= 1 - 2s^3 + s^6 \\ &= (1 - s^3) \cdot (1 - s^3) \\ &= (1 - s^3)^2, \end{aligned}$$

wobei wir nach der ersten Zeile entwickelt haben.

Dieses Polynom  $(1 - s^3)^2$  hat nur  $s = 1$  als reelle Nullstelle, da über  $\mathbb{R}$  gilt  $s^3 = 1 \iff s = 1$ . Folglich hat das oben gegebene lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung für alle reellen Werte  $s \neq 1$  unabhängig davon, welchen Wert die Variable  $t$  besitzt. Für  $s \neq 1$  und  $t \in \mathbb{R}$  beliebig ist die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} z &= \frac{t - s}{1 - s^3}, \\ y &= \frac{1 - s^2 - s^3 + 2st + s^4t - 2t^2}{(1 - s^3)^2}, \\ x &= \frac{1 - s + s^4 - 3s^2t + 2st^2}{(1 - s^3)^2}. \end{aligned}$$

Diese Lösungen erhält man aus den im linearen Gleichungssystem gegebenen drei Gleichungen

$$\begin{aligned} (1) \quad &x + sy + s^2z = 1 \\ (2) \quad &s^2x + y + 2tz = 1 \\ (3) \quad &sx + s^2y + z = t \end{aligned}$$

mit den drei Rechnungen

$$(3) - s \cdot (1) = z - s^3z = (1 - s^3)z = t - s \iff z = \frac{t - s}{1 - s^3},$$

$$\begin{aligned}
& \text{der Term } s^2x \text{ aus } s^2 \cdot (1) \text{ und } (2) \implies s^2x = s^2 - s^4z - s^3y = 1 - 2tz - y = s^2x \\
& \iff (1 - s^3)y = 1 - 2tz - s^2 + s^4z \\
& \iff (1 - s^3)y = 1 - 2t \cdot \left( \frac{t-s}{1-s^3} \right) - s^2 + s^4 \cdot \left( \frac{t-s}{1-s^3} \right) \\
& \iff (1 - s^3)y = \frac{(1-s^3) - (2t^2 - 2ts) - (s^2 - s^5) + (s^4t - s^5)}{1-s^3} \\
& \iff (1 - s^3)y = \frac{1 - s^3 - 2t^2 + 2ts - s^2 + s^5 + s^4t - s^5}{1-s^3} \\
& \iff y = \frac{1 - s^2 - s^3 + 2st + s^4t - 2t^2}{(1-s^3)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) \implies x &= 1 - sy - s^2z = 1 - s \cdot \left( \frac{1 - s^2 - s^3 + 2st + s^4t - 2t^2}{(1-s^3)^2} \right) - s^2 \cdot \left( \frac{t-s}{1-s^3} \right) \\
&= \frac{(1-s^3)^2 - s \cdot (1 - s^2 - s^3 + 2st + s^4t - 2t^2) - s^2 \cdot (t-s) \cdot (1-s^3)}{(1-s^3)^2} \\
&= \frac{1 - 2s^3 + s^6 - s + s^3 + s^4 - 2s^2t - s^5t + 2st^2 - (s^2t - s^3) \cdot (1-s^3)}{(1-s^3)^2} \\
&= \frac{1 - 2s^3 + s^6 - s + s^3 + s^4 - 2s^2t - s^5t + 2st^2 - s^2t + s^3 + s^5t - s^6}{(1-s^3)^2} \\
&= \frac{1 - s + s^4 - 3s^2t + 2st^2}{(1-s^3)^2}.
\end{aligned}$$

Falls  $s = 1$  gilt, so liefern die erste und dritte Gleichung

$$\text{wenn } s = 1 \text{ ist, so ist } (1) = (3) \iff 1 = x + sy + s^2z = x + y + z = sx + s^2y + z = t \implies t = 1,$$

was bedeutet, dass dann  $t = 1$  ist, das heisst für  $s = 1$  und  $t \neq 1$  existieren also keine Lösungen.

Die unendlich vielen Lösungen im Fall  $s = 1$  und  $t = 1$  erhält man durch

(1.) wähle zum Beispiel  $x \in \mathbb{R}$  beliebig,

(2.) dann gilt mit  $s = 1$  und  $t = 1$ , dass  $(1) = (2)$

$$\implies 1 = x + sy + s^2z = x + y + z = s^2x + y + 2tz = 1 \implies z = 2z \iff z = 0,$$

(3.) Nun gilt (1) mit  $s = 1 \implies x + sy + s^2z = x + y + z = 1 \implies y = 1 - x - z = 1 - x - 0 = 1 - x$

und sind somit gegeben durch

$$x \in \mathbb{R} \text{ beliebig, } y = 1 - x, z = 0,$$

wobei  $x \in \mathbb{R}$  ein beliebig wählbarer freier Parameter ist, der die unendliche Lösungsfamilie parametrisiert.

12. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -7x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 7 \end{array}$$

mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

**Lösung:** Es gibt genau eine Lösung, nämlich

$$x_1 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{17}{4}, \quad x_3 = \frac{9}{4}.$$

Diese berechnet man mit dem Gauss-Algorithmus wie folgt

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccc|c} \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -2 \\ -7 & -3 & 1 & 7 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{2.Z-1.Z} \\ \xrightarrow{3.Z+7 \times (1.Z)} \end{array} & \begin{array}{|ccc|c} \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & 8 & 35 \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|ccc|c} \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 35 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{2.Z=\frac{1}{3} \times (2.Z)} \\ \xrightarrow{3.Z+4 \times (2.Z)} \end{array} & \begin{array}{|ccc|c} \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 27 \\ \hline \end{array} \cdot (*) \end{array}$$

Aus (\*) folgt, dass  $\text{Rang}(\ast) = 3$  und damit ist die Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems eindeutig bestimmt.

Zudem berechnet man durch Rückwärtseinsetzen in (\*), diese eindeutige Lösung zu

$$\begin{aligned} 12x_3 = 27 &\iff x_3 = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}, \\ -x_2 + x_3 = -2 &\iff -x_2 = -2 - x_3 \iff x_2 = 2 + x_3 = 2 + \frac{9}{4} = \frac{8+9}{4} = \frac{17}{4}, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 &\iff x_1 = 4 - x_3 - x_2 = 4 - \frac{17}{4} - \frac{9}{4} = \frac{16-17-9}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

13. Welche Beziehungen zwischen  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  müssen erfüllt sein, damit das folgende System lösbar ist?

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & b_1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & b_3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_4 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & b_5 \end{array}$$

**Lösung:** Wenn wir drei linear unabhängige Gleichungen im System finden, dann bestimmen diese die Lösung des Systems eindeutig, da wir drei Variablen  $x_1, x_2, x_3$  haben und somit dieses  $3 \times 3$ -Teilsystem eindeutig lösbar ist.

Beispielsweise sind die untersten drei Gleichungen linear unabhängig, da die Determinante der zugehörigen Matrix ungleich Null ist, weil für sie gilt

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=1-1=0} + (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=0-1=-1} = 2 \cdot (-1) = -2 \neq 0$$

und daher bestimmen die drei Parameter  $b_3, b_4, b_5$ , welche zu diesen untersten drei Gleichungen gehören, eindeutig eine Lösung und legen somit auch die Werte für  $b_1$  und  $b_2$  fest. Durch Addition der dritten und vierten Gleichung erhält man mittels eines Vergleichs mit der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} & 1. \text{ Gleichung} = 3. \text{ Gleichung} + 4. \text{ Gleichung} \\ & \iff (b_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3) = (x_2 + 2x_3 = b_3) + (x_1 + x_2 + x_3 = b_4) \\ & \iff b_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_3 + b_4 \\ & \implies b_1 = b_3 + b_4 \end{aligned}$$

und durch Subtraktion der dritten vom dreifachen der vierten Gleichung erhält man mittels eines Vergleichs mit der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned} & 2. \text{ Gleichung} = 3 \times (4. \text{ Gleichung}) - 3. \text{ Gleichung} \\ & \iff (b_2 = 3x_1 + 2x_2 + x_3) = 3 \times (x_1 + x_2 + x_3 = b_4) - (x_2 + 2x_3 = b_3) \\ & \iff b_2 = 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3b_4 - b_3 \\ & \implies b_2 = 3b_4 - b_3. \end{aligned}$$

Folglich sind die Beziehungen, damit das System lösbar ist, gegeben durch

$$\begin{aligned} b_1 &= b_3 + b_4, \\ b_2 &= 3b_4 - b_3, \\ b_3 &= b_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig,} \\ b_4 &= b_4 \in \mathbb{R} \text{ beliebig,} \\ b_5 &= b_5 \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \end{aligned}$$

**14.** Auf einem geschlossenen Metalldraht werden an 4 Punkten die Temperaturen  $x_1, x_2, x_3, x_4$  gemessen. Dabei ist die Temperatur in einem der Punkte jeweils gleich dem arithmetischen Mittel der Temperaturen der beiden benachbarten Punkte.

- (a) Stellen Sie ein Gleichungssystem für  $x_1, x_2, x_3, x_4$  auf.
- (b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge davon.

**Lösung:**

- (a) Das arithmetische Mittel zweier Zahlen  $a$  und  $b$  ist gleich  $\frac{a+b}{2}$ . Der geschlossene Metalldraht mit den vier Temperaturen  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ist schematisch dargestellt zum Beispiel

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \leftrightarrow & x_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_4 & \leftrightarrow & x_3 \end{array}$$

und daher sind die Temperaturen gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{x_2 + x_4}{2} &\iff x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 = 0, \\ x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} &\iff x_2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ x_3 = \frac{x_2 + x_4}{2} &\iff x_3 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 = 0, \\ x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2} &\iff x_4 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0. \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem in Matrixschreibweise lautet somit

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Wir lösen dieses System mit dem Gauss-Algorithmus. Dazu rechnen wir

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} \begin{array}{|cccc|c} \hline 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{1.Z=2 \times (1.Z)} \\ \xrightarrow{2.Z=2 \times (2.Z)} \\ \xrightarrow{3.Z=2 \times (3.Z)} \\ \xrightarrow{4.Z=2 \times (4.Z)} \end{array} & \begin{array}{|cccc|c} \hline 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{2.Z=- (2.Z)} \\ \xrightarrow{3.Z=- (3.Z)} \\ \xrightarrow{4.Z=- (4.Z)} \end{array} & \begin{array}{|cccc|c} \hline 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \xrightarrow{1.Z \leftrightarrow 4.Z} \\ \xrightarrow{2.Z \leftrightarrow 3.Z} \end{array} & \begin{array}{|cccc|c} \hline 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{3.Z-1.Z} \\ \xrightarrow{4.Z-2 \times (1.Z)} \end{array} & \begin{array}{|cccc|c} \hline 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{3.Z+2 \times (2.Z)} \\ \xrightarrow{4.Z+2.Z} \end{array} & \begin{array}{|cccc|c} \hline 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} \xrightarrow{4.Z-3.Z} & \begin{array}{|cccc|c} \hline 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \cdot (*) \end{array} \end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen in (\*) berechnet man

Aus der 4. Zeile von (\*): wähle  $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$  beliebig,

Aus der 3. Zeile von (\*):  $-4x_3 + 4x_4 = 0 \iff -4x_3 = -4x_4 \iff x_3 = x_4 = \lambda$ ,

Aus der 2. Zeile von (\*):  $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \iff x_2 = 2x_3 - x_4 = 2x_4 - x_4 = x_4 = \lambda$ ,

Aus der 1. Zeile von (\*):  $x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \iff x_1 = 2x_4 - x_3 = 2x_4 - x_4 = x_4 = \lambda$ .

Die einzigen Lösungen des Systems sind daher

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \lambda \text{ für } \lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig,}$$

die Temperatur ist also konstant.

**15.** Geben Sie für  $s$  und  $t$  Bedingungen an, so dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + sx_2 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + sx_3 &= t \end{aligned}$$

- (a) keine Lösung,
- (b) genau eine Lösung,
- (c) unendlich viele Lösungen

besitzt. Bestimmen Sie die entsprechenden Lösungsmengen.

**Lösung:** Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & s \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & s \end{pmatrix}}_{=s-2} + (-1)^{1+2} \cdot s \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & s \end{pmatrix}}_{=0-1=-1} + 0 \\ &= (s-2) + s \\ &= 2s-2. \end{aligned}$$

Es gilt  $2s-2=0 \iff s=1$ . Also haben wir genau eine Lösung, wenn  $s \neq 1$  und zwar

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & s & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ t & 2 & s \end{pmatrix}}{2s-2} = \frac{0 + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ t & s \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & s \\ t & 2 \end{pmatrix}}{2s-2} \\ &= \frac{2s - (4 - st)}{2s-2} = \frac{st + 2s - 4}{2s-2}, \\ x_2 &= \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & s \end{pmatrix}}{2s-2} = \frac{0 + 0 + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & t \end{pmatrix}}{2s-2} = -\frac{t-2}{2s-2} = \frac{2-t}{2s-2}, \\ x_3 &= \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & s & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix}}{2s-2} = \frac{0 + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & t \end{pmatrix} + 0}{2s-2} = \frac{t-2}{2s-2} = -x_2, \end{aligned}$$



wobei wir hier zur Berechnung der Lösungen  $x_1, x_2, x_3$  die Cramer'sche Regel aus der Aufgabe 3 der Serie 10 verwendet haben.

Ist nun  $s = 1$ , so erhält man als Verträglichkeitsbedingung  $t = 2$ , da mit  $s = 1$  gilt

1. Gleichung + 2. Gleichung = 3. Gleichung

$$(x_1 + sx_2 = x_1 + x_2 = 2) + (x_2 + x_3 = 0) = (x_1 + 2x_2 + x_3 = x_1 + 2x_2 + sx_3 = t) \implies t = 2$$

und in diesem Fall sind die Lösungen

wähle  $x_1 \in \mathbb{R}$  beliebig,

aus der 1. Gleichung :  $x_1 + sx_2 = x_1 + x_2 = 2 \iff x_2 = 2 - x_1$ ,

aus der 2. Gleichung :  $x_2 + x_3 = 0 \iff x_3 = -x_2 = -(2 - x_1) = x_1 - 2$ ,

oder zusammengefasst

$x_1 \in \mathbb{R}$  beliebig,

$x_2 = 2 - x_1$ ,

$x_3 = x_1 - 2$ .

Für  $s = 1$  und  $t \neq 2$  gibt es keine Lösung, da dann die ersten beiden Gleichungen des gegebenen Systems nicht mit der letzten Gleichung vereinbar sind und daher sich ein Widerspruch ergibt.

Daher gilt:

- (a) Für  $s = 1$  und  $t \neq 2$  gibt es keine Lösung.
- (b) Genau eine Lösung wenn  $s \neq 1$ .
- (c) Unendlich viele Lösungen mit  $s = 1$  und  $t = 2$ .

**16.** Der sogenannte **Massenausgleich zweiter Ordnung** ([Link zu Animationen](#)) einer  $k$ -Zylindermaschine liefert für die Impulse  $(I_1)$ ,  $(I_2)$  und die Momente  $(M_1)$ ,  $(M_2)$  der ersten und zweiten Ordnung folgende Bedingungen:

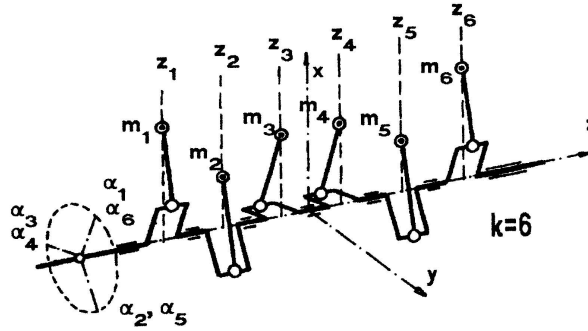
$$\sum_{i=1}^k m_i \sin(\alpha_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^k m_i \cos(\alpha_i) = 0 \quad (I_1)$$

$$\sum_{i=1}^k m_i \sin(2\alpha_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^k m_i \cos(2\alpha_i) = 0 \quad (I_2)$$

$$\sum_{i=1}^k m_i z_i \sin(\alpha_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^k m_i z_i \cos(\alpha_i) = 0 \quad (M_1)$$

$$\sum_{i=1}^k m_i z_i \sin(2\alpha_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^k m_i z_i \cos(2\alpha_i) = 0 \quad (M_2)$$

Dabei bezeichnen  $\alpha_i$  die Kurbelwinkel und  $m_i > 0$  die Massen. Wir nehmen weiter an, dass der Massenschwerpunkt in  $z = 0$  liegt, dass  $z_i \neq z_j$  für  $i \neq j$  und dass  $k > 1$ .



(a) Wie lautet die Matrix  $A$  des homogenen linearen Gleichungssystems, das die Vektoren  $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)^T$  und  $\vec{M} = (z_1 m_1, \dots, z_k m_k)^T$  erfüllen müssen? Warum ist  $\vec{M}$  nie ein Vielfaches von  $\vec{m}$ ? Welchen Rang darf  $A$  bei Massenausgleich höchstens haben?

(b) Bestimmen Sie  $A$  und  $\text{Rang}(A)$  und lösen Sie  $Ax = 0$  für die zwei Fälle:

(i) 4-Zylinder mit Zündfolge 1-3-4-2,  $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 180^\circ$ .

(ii) 6-Zylinder mit Zündfolge 1-5-3-6-2-4,  $\alpha_1 = \alpha_6 = 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_5 = 120^\circ$ ,  $\alpha_3 = \alpha_4 = 240^\circ$ .

Ist in beiden Fällen Massenausgleich möglich?

(c) Gibt es für den üblichen Aufbau einer 4-Zylindermaschine

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m, \quad z_1 = -z_4 = 3z_2 = -3z_3$$

Kurbelwinkel  $\alpha_i$ , so dass Massenausgleich zweiter Ordnung vorliegt?

## Lösung:

(a) Mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1) & \sin(\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_k) \\ \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \dots & \cos(\alpha_k) \\ \sin(2\alpha_1) & \sin(2\alpha_2) & \dots & \sin(2\alpha_k) \\ \cos(2\alpha_1) & \cos(2\alpha_2) & \dots & \cos(2\alpha_k) \end{pmatrix}$$

lauten die beiden Gleichungssysteme

$$A \cdot \vec{m} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1) & \sin(\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_k) \\ \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \dots & \cos(\alpha_k) \\ \sin(2\alpha_1) & \sin(2\alpha_2) & \dots & \sin(2\alpha_k) \\ \cos(2\alpha_1) & \cos(2\alpha_2) & \dots & \cos(2\alpha_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k m_i \sin(\alpha_i) \\ \sum_{i=1}^k m_i \cos(\alpha_i) \\ \sum_{i=1}^k m_i \sin(2\alpha_i) \\ \sum_{i=1}^k m_i \cos(2\alpha_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$A \cdot \vec{M} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1) & \sin(\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_k) \\ \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \dots & \cos(\alpha_k) \\ \sin(2\alpha_1) & \sin(2\alpha_2) & \dots & \sin(2\alpha_k) \\ \cos(2\alpha_1) & \cos(2\alpha_2) & \dots & \cos(2\alpha_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 m_1 \\ z_2 m_2 \\ \vdots \\ z_k m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k m_i z_i \sin(\alpha_i) \\ \sum_{i=1}^k m_i z_i \cos(\alpha_i) \\ \text{sum}_{i=1}^k m_i z_i \sin(2\alpha_i) \\ \sum_{i=1}^k m_i z_i \cos(2\alpha_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

wobei hier 0 der Nullvektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{R}^4$  ist.

Angenommen  $\vec{M}$  sei ein Vielfaches von  $\vec{m}$ , so gilt

$$\lambda \vec{m} = \begin{pmatrix} \lambda m_1 \\ \lambda m_2 \\ \vdots \\ \lambda m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 m_1 \\ z_2 m_2 \\ \vdots \\ z_k m_k \end{pmatrix} = \vec{M}$$

und somit  $z_1 = z_2 = \dots = z_k = \lambda$  (weil alle  $m_i \neq 0$  sind) - ein Widerspruch zur in der Aufgabenstellung gemachten Annahme  $z_i \neq z_j$  für  $i \neq j$ .

Der Rang der Matrix  $A$  darf höchstens gleich  $k-2$  sein (diese Bedingung ist automatisch erfüllt, sobald  $k \geq 6$ , da der Rang der  $4 \times k$ -Matrix  $A$  dann höchstens 4 sein kann). Wäre  $\text{Rang}(A) = k$ , so hätte das Gleichungssystem  $A\vec{m} = 0$  nur die Lösung  $\vec{m} = 0$ , was wegen  $m_i > 0$  nicht sein kann. Wäre  $\text{Rang}(A) = k-1$ , so gäbe es nur eine linear unabhängige Lösung des homogenen Gleichungssystems  $Ax = 0$ , daher wären  $\vec{m}$  und  $\vec{M}$  linear abhängig, weil beide in dieser eindimensionalen Lösungsmenge enthalten sein müssten- aber wir haben gerade oben gezeigt, dass dem nicht so ist.

(b) (i) 4-Zylinder: Mit  $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 180^\circ$  ist  $A$  in diesem Fall

$$A = \begin{pmatrix} \sin(0) & \sin(\pi) & \sin(\pi) & \sin(0) \\ \cos(0) & \cos(\pi) & \cos(\pi) & \cos(0) \\ \sin(0) & \sin(2\pi) & \sin(2\pi) & \sin(0) \\ \cos(0) & \cos(2\pi) & \cos(2\pi) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

in Zeilenstufenform (\*), also z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{1.Z \leftrightarrow 4.Z \\ 2.Z = -(2.Z)}]{\substack{1.Z \leftrightarrow 4.Z \\ 2.Z = -(2.Z)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.Z + 1.Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{2.Z = \frac{1}{2} \times (2.Z)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1.Z - 2.Z} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. (*)$$

In diesem Fall gilt  $\text{Rang}(A) = 2$ . Es ist wegen (\*) daher

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \implies \lambda_4 = -\lambda_1 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = -\lambda_2 \quad \text{mit} \quad \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \text{beliebig.} \end{aligned}$$

Die Lösungen für das homogene System  $Ax = 0$  oder  $A\vec{m} = 0$  sind somit von der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ -\lambda_2 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen der nichterfüllten Bedingung  $m_i > 0$  existieren also keine zulässigen Lösungen und somit ist in diesem Fall (i) auch kein Massenausgleich 2. Ordnung möglich.

- (ii) 6-Zylinder: Mit  $\alpha_1 = \alpha_6 = 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_5 = 120^\circ$ ,  $\alpha_3 = \alpha_4 = 240^\circ$  wird die Matrix  $A$  in diesem Fall zu

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \sin(0) & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin(0) \\ \cos(0) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos(0) \\ \sin(0) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \sin(0) \\ \cos(0) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \cos(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und eine mögliche Zeilenstufenform lautet

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1.Z = \frac{2}{\sqrt{3}} \times (1.Z) \\ 2.Z = 2 \times (2.Z) \\ \xrightarrow{\quad} \\ 3.Z = \frac{2}{\sqrt{3}} (3.Z) \\ 4.Z = 2 \times (4.Z) \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{1.Z \leftrightarrow 2.Z} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 3.Z + 2.Z \\ 4.Z - 1.Z \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{1.Z = 1.Z + 2.Z} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1.Z = \frac{1}{2} \times (1.Z)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (*) \end{aligned}$$

Somit ist  $\text{Rang}(A) = 2$  in diesem Fall. Es ist wegen (\*) daher

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_6 &= 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ \implies \lambda_1 &= \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_6 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 \\ \text{und } \lambda_3 &\in \mathbb{R}, \lambda_4 \in \mathbb{R}, \lambda_5 \in \mathbb{R}, \lambda_6 \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \end{aligned}$$

Die Lösungen des homogenen Systems  $Ax = 0$  sind daher gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_6 \\ \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und man erhält einen Massenausgleich z.B. mit  $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = m$  für  $\vec{m}$  und  $\lambda_6 = -mz_1$ ,  $\lambda_5 = -mz_2$ ,  $\lambda_4 = -mz_3$ ,  $\lambda_3 = mz_3$  für  $\vec{M}$ , das heisst

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} mz_1 \\ mz_2 \\ mz_3 \\ -mz_3 \\ -mz_2 \\ -mz_1 \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ -z_3 \\ -z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Gleichungen (nur vier der acht Gleichungen) lauten

$$\begin{aligned} m (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + \sin(\alpha_4)) &= 0 \\ m (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_4)) &= 0 \\ mz_3 (-3 \sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + 3 \sin(\alpha_4)) &= 0 \\ mz_3 (-3 \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + 3 \cos(\alpha_4)) &= 0, \end{aligned}$$

da für eine 4-Zylindermaschine  $1 \leq i \leq 4$  gilt. Ebenfalls haben wir verwendet, dass  $z_1 = -z_4 = 3z_2 = -3z_3$  und alle obigen Gleichungen in der Variablen  $z_3$  geschrieben. Wir kürzen die Faktoren vor den Klammern weg, damit wir das lineare Gleichungssystem

$$\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + \sin(\alpha_4) = 0 \quad (1)$$

$$\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_4) = 0 \quad (2)$$

$$-3 \sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + 3 \sin(\alpha_4) = 0 \quad (3)$$

$$-3 \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + 3 \cos(\alpha_4) = 0 \quad (4)$$

erhalten und setzen dann ohne Verlust von Information  $\alpha_1 = 0$ , da wir eine Zylindermaschine immer so drehen können, dass  $\alpha_1 = 0$  gilt.

Eine Addition der Gleichung (1) und der Gleichung (3) mit  $\alpha_1 = 0$  und  $\sin(0) = 0$  ergibt dann

$$\begin{aligned}
 & (\sin(0) + \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + \sin(\alpha_4) = 0) \\
 & + (-3 \sin(0) - \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + 3 \sin(\alpha_4) = 0) \\
 \iff & (\sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + \sin(\alpha_4) = 0) \\
 & + (-\sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + 3 \sin(\alpha_4) = 0) \\
 \iff & 2 \sin(\alpha_3) + 4 \sin(\alpha_4) = 0 \\
 \iff & \sin(\alpha_3) + 2 \sin(\alpha_4) = 0
 \end{aligned}$$

und dies ist äquivalent zu

$$\sin(\alpha_3) = -2 \sin(\alpha_4). \quad (5)$$

Eine Addition der Gleichung (2) und der Gleichung (4) mit  $\alpha_1 = 0$  und  $\cos(0) = 1$  liefert zusätzlich

$$\begin{aligned}
 & (\cos(0) + \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_4) = 0) \\
 & + (-3 \cos(0) - \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + 3 \cos(\alpha_4) = 0) \\
 \iff & (1 + \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_4) = 0) \\
 & + (-3 - \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + 3 \cos(\alpha_4) = 0) \\
 \iff & -2 + 2 \cos(\alpha_3) + 4 \cos(\alpha_4) = 0 \\
 \iff & -1 + \cos(\alpha_3) + 2 \cos(\alpha_4) = 0
 \end{aligned}$$

und dies ist äquivalent zu

$$\cos(\alpha_3) = 1 - 2 \cos(\alpha_4). \quad (6)$$

Quadrieren und addieren von Gleichung (5) und Gleichung (6) ergibt

$$\begin{aligned}
 1 &= \sin^2(\alpha_3) + \cos^2(\alpha_3) \\
 &= (-2 \sin(\alpha_4))^2 + (1 - 2 \cos(\alpha_4))^2 \\
 &= 4 \sin^2(\alpha_4) + (1 - 4 \cos(\alpha_4) + 4 \cos^2(\alpha_4)) \\
 &= [1 + 4 \cdot \underbrace{(\sin^2(\alpha_4) + \cos^2(\alpha_4))}_{=1}] - 4 \cos(\alpha_4) \\
 &= 5 - 4 \cos(\alpha_4) \\
 \iff & 4 \cos(\alpha_4) = 4 \\
 \implies & \cos(\alpha_4) = 1 \implies \alpha_4 = 0.
 \end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis  $\alpha_4 = 0$  in die Gleichung (6) ein, erhält man

$$\cos(\alpha_3) = 1 - 2 \cos(0) = 1 - 2 = -1 \implies \alpha_3 = \pi = 180^\circ$$

und mit  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_3 = \pi$ ,  $\alpha_4 = 0$  schliesst man aus der Gleichung (2) schliesslich

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_4) &= 0 \\ \iff \cos(0) + \cos(\alpha_2) + \cos(\pi) + \cos(0) &= 0 \\ \iff 1 + \cos(\alpha_2) - 1 + 1 &= 0 \\ \iff \cos(\alpha_2) = -1 \implies \alpha_2 = \pi = 180^\circ.\end{aligned}$$

Daher gilt zusammenfassend

$$\alpha_1 = \alpha_4 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 180^\circ$$

und dies ist genau der gleiche Fall wie in **(b) (i)** und dort haben wir bereits gezeigt, dass es in diesem Fall keinen Massenausgleich 2. Ordnung gibt. Somit gibt es keinen Massenausgleich 2. Ordnung (siehe **(b) (i)**).