

# Basisprüfung in Linearer Algebra I / II

## Single Choice Aufgaben 1-20

Die Single Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie 0 Punkte. **Kreuzen Sie deshalb in jedem Fall immer eine Antwort an.**

1. Welcher der folgenden Vektoren **ist** ein Eigenvektor der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ?

- (a)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$                       (b)  $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$   
(c)  $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$                       (d)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ?

- (a)  $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$                       (b)  $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$   
(c)  $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$                       (d)  $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Gegeben sei der Vektor  $v \in \mathbb{R}^3$  durch

$$v := \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 37 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ , wobei

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Darstellung besitzt dieser Vektor  $v$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ , wobei

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}?$$

(a)  $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(d)  $\begin{pmatrix} 37 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

4. Gegeben seien die vier Punkte  $p_1, p_2, p_3, p_4$  in  $\mathbb{R}^2$  mit den Koordinaten

$$p_1 = (1, 5),$$

$$p_2 = (3, 7),$$

$$p_3 = (-3, 9),$$

$$p_4 = (2, 6).$$

Welches ist der **grösste** Abstand  $D$ , den zwei dieser Punkte voneinander aufweisen?

(a)  $D = 2\sqrt{10}$

(b)  $D = 4\sqrt{2}$

(c)  $D = \sqrt{34}$

(d)  $D = \sqrt{65}$

5. Welcher der folgenden Ausdrücke definiert ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum der reellen  $2 \times 2$ -Matrizen?
- (a)  $\langle A, B \rangle := \|A\| \cdot \|B\|$
  - (b)  $\langle A, B \rangle := AB$
  - (c)  $\langle A, B \rangle := \det(AB)$
  - (d)  $\langle A, B \rangle := \text{spur}(AB^T)$
6. Es seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zwei reelle Matrizen und  $\mathbb{I}_n$  die  $n \times n$ -Einheitsmatrix. Welche der folgenden Antwortmöglichkeiten ist **falsch**?
- (a) Es gilt stets  $\det(A^2 + 2A + \mathbb{I}_n) = (\det(A + \mathbb{I}_n))^2$ .
  - (b) Es gilt stets  $\det(AB) = \det(BA)$ .
  - (c) Es gilt stets  $\det(A^2 + 2AB + B^2) = (\det(A + B))^2$ .
  - (d) Es gilt stets  $\det(A^2 + 2AB + 2BA + 4B^2) = (\det(A + 2B))^2$ .
7. Welche der folgenden Abbildungen  $f$  ist **linear**?
- (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$
  - (b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$
  - (c)  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto \mathbb{I}_2$  mit der  $2 \times 2$ -Einheitsmatrix  $\mathbb{I}_2$
  - (d)  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$
8. Gegeben seien die drei Punkte  $A = (-1, 3, 5)$ ,  $B = (2, -3, -4)$  und  $C = (2, 1, -2)$  im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$ . Welcher Punkt  $P$  ist die Orthogonalprojektion des Punktes  $C$  auf die Gerade  $g$ , welche durch die beiden Punkte  $A$  und  $B$  verläuft?
- (a)  $P = (-2, 5, 8)$
  - (b)  $P = (0, 1, 2)$
  - (c)  $P = (1, -1, -1)$
  - (d)  $P = (3, -5, -7)$

9. Welche Dimension hat der Vektorraum  $V$  bestehend aus allen Matrizen  $A$  der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \text{ und } \text{spur}(A) = 0?$$

- (a)  $\dim(V) = 3$
- (b)  $\dim(V) = 4$
- (c)  $\dim(V) = 5$
- (d)  $\dim(V) = 6$

10. Welche der folgenden Mengen  $A, B, C, D$  ist **kein** Untervektorraum des Vektorraumes  $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$  bestehend aus allen  $3 \times 3$ -Matrizen, ausgestattet mit der Matrixaddition und der skalaren Multiplikation?

- (a)  $A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \text{ und } a = d + e \right\}$
- (b)  $B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ f & 0 & g \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R} \text{ und } a = d - e \right\}$
- (c)  $C := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \text{ und } a = d + 1 \right\}$
- (d)  $D := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R} \text{ und } a = 2d \right\}$

11. Welchen Rang hat die  $4 \times 4$ -Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ?

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4

12. Betrachten Sie den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathcal{F} := F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  der Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  in der Variablen  $x$  mit der Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \forall f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Darin enthalten ist der Untervektorraum

$$\mathcal{P}_3 := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, 2, 3\}$$

der reellen Polynome mit Grad  $\leq 3$  in der Variablen  $x$ .

Welche der folgenden Aussagen ist **richtig**?

- (a) Die beiden Funktionen  $\sin^2(x)$  und  $\cos^2(x)$  sind linear abhängige Vektoren in  $\mathcal{F}$ .
- (b) Die beiden Polynome  $p(x) = x^2 + 2x - 1$  und  $q(x) = x(x^2 + 2x - 1)$  sind linear abhängige Vektoren in  $\mathcal{F}$ .
- (c) Es gilt  $\text{span}\{5, 1 + x, 1 + x + x^2, x^3 + 2\} = \mathcal{P}_3$ .
- (d) Die Dimension des Untervektorraumes  $\mathcal{P}_3$  ist 3.

13. Für welchen reellen Parameter  $a \in \mathbb{R}$  hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + y + 3z &= 1 \\(a + 1)x - 2z &= 2 \\x + (2 - 2a)y &= 3\end{aligned}$$

nur den Punkt  $(x, y, z) = (3, -8, 2)$  als Lösung?

- (a)  $a = 1$
- (b)  $a = 3$
- (c)  $a = 5$
- (d)  $a = 7$

14. Welchen Wert hat der Ausdruck

$$\text{spur} \left[ \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & x \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 3 \ -2) + \begin{pmatrix} -x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \right] ?$$

- (a)  $x + 1$
- (b)  $2x + 3$
- (c) 25
- (d) 31

15. Wie lautet das charakteristische Polynom der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ?

- (a)  $-x^3 + 7x - 6$
- (b)  $-x^3 + 2x^2 + 5x + 1$
- (c)  $-x^3 + 3x^2 - 3x + 6$
- (d)  $-x^3 + 4$

16. Welche der folgenden Matrizen ist **nicht** orthogonal?

- (a)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (b)  $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$
- (c)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- (d)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

17. Sei die Matrix  $M$  gegeben durch  $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

Welche der folgenden Mengen  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  **ist** eine Basis von  $\ker(M)$ ?

$$(a) \quad A := \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -19 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(b) \quad B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(c) \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(d) \quad D := \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -17 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

18. Welcher der folgenden Vektoren liegt **nicht** im Bild der Matrix  $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ ?

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (d) \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

19. Welchen Wert hat die Determinante der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ?

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4

20. Welche der folgenden Mengen  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  von Vektoren ist **keine** Basis von  $\mathbb{R}^3$ ?

- (a)  $A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
- (b)  $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- (c)  $C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- (d)  $D := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$



## Handaufgaben 21, 22 und 23

Die folgenden drei Handaufgaben 21, 22 und 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

21. (10 Punkte)

(a) **(2 Punkte)** Berechnen Sie die Zeilenstufenform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) **(2 Punkte)** Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) **(3 Punkte)** Finden Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) **(3 Punkte)** Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcrcl} x & + & 2y & + & 4z & = & 5 \\ 3x & + & y & + & 4z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1. \end{array}$$

22. (10 Punkte)

(a) **(3 Punkte)** Gegeben sei der Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  mit der Standardbasis

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Durch die Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix  $T$  von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{C}$ .

- (b) **(2 Punkte)** Gegeben sei wiederum der Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  mit der Standardbasis  $\mathcal{B}$ . Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}^3$  bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{B}$ . Durch die Wahl einer neuen Basis  $\mathcal{D}$  werden neue Koordinaten eingeführt. Die Übergangsmatrix  $M$  von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{D}$  sei

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch welche Matrix  $B$  wird die lineare Abbildung  $A$  bezüglich der neuen Koordinaten, welche zur Basis  $\mathcal{D}$  gehören, beschrieben?

- (c) **(3 Punkte)** Es sei  $\mathcal{P}_3$  der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad  $\leq 3$ . Gegeben sei die folgende lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{P}_3 &\rightarrow \mathcal{P}_3 \\ p(x) &\mapsto 2p''(x) + 3xp'(x). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix  $D$  von  $\mathcal{F}$  bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{E}$  von  $\mathcal{P}_3$ , wobei

$$\mathcal{E} := \{1, x, x^2, x^3\}.$$

- (d) **(2 Punkte)** Es sei  $\mathcal{P}_2$  der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad  $\leq 2$  und

$$\mathcal{A} := \{a_1(x) := -1, a_2(x) := x + 1, a_3(x) := x^2 + x + 1\}.$$

Schreiben Sie das Polynom  $p(x) := 2x^2 + x - 2$  in den Koordinaten der Basis  $\mathcal{A}$ .

### 23. (10 Punkte)

- (a) **(2 Punkte)** Es sei  $\mathcal{P}_2$  der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad  $\leq 2$  und  $\mathcal{F}$  die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{P}_2 &\rightarrow \mathcal{P}_2 \\ p(x) &\mapsto xp'(x). \end{aligned}$$

Finden Sie dasjenige Polynom  $p(x) \in \mathcal{P}_2$ , für welches folgendes gilt:

$$\mathcal{F}(p(x)) = p(x) \quad \text{und} \quad p(1) = 3.$$

- (b) **(4 Punkte)** Es seien  $C([0, 1])$  und  $C^1([0, 1])$  die Vektorräume der stetigen Funktionen und der stetig differenzierbaren Funktionen auf  $[0, 1]$ . Gegeben sei zudem die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{T} : C^1([0, 1]) &\rightarrow C([0, 1]) \\ f(x) &\mapsto f'(x).\end{aligned}$$

Bestimmen Sie denjenigen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  und die dazugehörige Eigenfunktion  $\phi_\lambda(x) \in C^1([0, 1])$  der linearen Abbildung  $\mathcal{T}$  (d.h.  $\mathcal{T}(\phi_\lambda(x)) = \lambda\phi_\lambda(x)$ ), sodass  $\phi_\lambda(0) = 1$  und  $\phi_\lambda(1) = 2$  gilt.

- (c) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{y} = Ay,$$

wobei die Matrix  $A$  gegeben ist durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$