

Single Choice Aufgaben

Die Single-Choice Aufgaben 1-20 haben jeweils vier Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie 0 Punkte. Kreuzen Sie deshalb in jedem Fall immer eine Antwort an.

1. Sei $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante $\det(A^{121} - A^{120})$ gleich...
 - ☒ (a) 0
 - (b) 1
 - (c) 120
 - (d) 121
2. Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine reelle Matrix. Falls die Matrix A die Eigenwerte 5 und 6 hat, was sind dann die Eigenwerte von A^2 ?
 - (a) $\frac{5}{2}$ und 3
 - (b) 5 und 6
 - (c) 10 und 12
 - ☒ (d) 25 und 36
3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Die Eigenwerte von A sind dann immer:
 - (a) positiv
 - ☒ (b) reell
 - (c) negativ
 - (d) komplex mit positivem Realanteil
4. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ die Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis sind dann gleich...
 - (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 - (b) $\begin{pmatrix} 25 \\ 7 \end{pmatrix}$
 - ☒ (c) $\begin{pmatrix} 30 \\ 13 \end{pmatrix}$
 - (d) $\begin{pmatrix} 48 \\ 12 \end{pmatrix}$

5. Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ diagonalisierbar mit Eigenwerten λ_1 und λ_2 . Dann ist die Determinante $\det(e^A)$ gleich...

- (a) $\ln(\lambda_1) \ln(\lambda_2)$
- (b) $e^{\lambda_1 \lambda_2}$
- ✓ (c) $e^{\lambda_1 + \lambda_2}$
- (d) $\lambda_1 \lambda_2$

6. Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

- (a) $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ✓ (c) $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- ✓ (a) $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$
- (b) $(A^\top)^\top = (A^{-1})^\top$
- (c) $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$
- (d) keine der obigen Aussagen ist richtig

8. Welche der folgenden Aussagen impliziert *nicht*, dass die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar ist?

- (a) $A^\top = A$
- (b) A besitzt n paarweise verschiedene Eigenwerte.
- ✓ (c) A ist regulär.
- (d) A besitzt n linear unabhängige Eigenvektoren.

9. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

- ✓ (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

10. Was ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in \mathbb{R}^3 ?

- ✓ (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

11. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine $(m \times n)$ -Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen wahr?

- ✓ (a) Die Spalten von A spannen das Bild von A auf.
- (b) Die Spalten von A bilden eine Basis des Bilds von A .
- (c) Die Spalten von A spannen den Kern von A auf.
- (d) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

12. Sei $2A = B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 - 12\lambda + 8.$$

Welchen Wert hat $\text{Spur}(A)$?

- (a) -12
- ✓ (b) 6
- (c) -6
- (d) 12

13. Was ist die Determinante $\det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$?

- ✓ (a) 0
- (b) 1
- (c) $a + b + c$
- (d) $2a^2 - 2c^2 + 2ab - 2bc$

14. Welche der folgenden Mengen bildet eine orthonormale Basis von \mathbb{R}^3 ?

- (a) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- (b) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- (c) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- ✓ (d) Keine der obigen Mengen.

15. Welche Dimension hat der Lösungsraum des folgenden Differentialgleichungssystems für $z_1(x)$ und $z_2(x)$?

$$\begin{aligned} z_1'' &= z_1 e^x + z_2' \\ z_2''' &= z_1' + \sin(x) z_2 \end{aligned}$$

- (a) 2
- (b) 4
- ✓ (c) 5
- (d) 6

16. Was ist die geometrische Interpretation der linearen Abbildung dargestellt von der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$?

- (a) Eine Rotation von $\frac{\pi}{2}$ um den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn, bei der die Länge der Vektoren unverändert bleibt.
- ✓ (b) Eine Rotation von $\frac{\pi}{2}$ um den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn, bei der die Länge der Vektoren sich verdoppelt.
- (c) Eine Rotation von $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn um den Ursprung, bei der die Länge der Vektoren sich verdoppelt.
- (d) Eine Rotation von $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn um den Ursprung, bei der die Länge der Vektoren unverändert bleibt.

17. Wenn für eine Matrix P gilt, dass $P = P^2$, dann gilt für jeden Eigenwert λ von P :

- (a) $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \leq 0$
- (b) $\lambda \in \mathbb{C}$, mit $|\lambda| = 1$
- (c) $\lambda \in (0, 1)$
- ✓ (d) $\lambda = 1$ oder $\lambda = 0$

18. Die quadratische Form $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$ ist:

- (a) positiv definit
- (b) negativ definit
- (c) indefinit
- ✓ (d) positiv semidefinit

19. Betrachten Sie zwei Matrizen A und B , so dass die Produkte AB und BA beide definiert sind. Wenn nun $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist, in welchem Raum befindet sich dann die Matrix B ?

- (a) $\mathbb{R}^{n \times n}$
- (b) $\mathbb{R}^{m \times m}$
- (c) $\mathbb{R}^{m \times n}$
- ✓ (d) $\mathbb{R}^{n \times m}$

20. Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine Matrix mit komplexen Eigenwerten $a + ib, a - ib$ (mit $b \neq 0$) und einem reellen Eigenwert λ . Welche Bedingung impliziert $\det A > 0$?

- (a) $a > 0$
- (b) $b > 0$
- ✓ (c) $\lambda > 0$
- (d) Die obigen Informationen reichen nicht aus, um die Frage zu beantworten.

Textaufgaben

Die offenen Aufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

21. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Ax$, gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$.

- (a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \{2e_1 - 5e_2, e_1 + 3e_2\}$ eine Basis von \mathbb{R}^2 bildet.
- (b) [4 Punkte] Finden Sie die Übergangsmatrix T von \mathcal{B} nach \mathcal{E} und ihre Inverse T^{-1} .
- (c) [3 Punkte] Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $[f]_{\mathcal{B}}$ von f bezüglich \mathcal{B} .

Lösung:

- (a) Wir haben $x(2e_1 - 5e_2) + y(e_1 + 3e_2) = 0$ genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Die Determinante der entsprechenden Matrix ist $11 \neq 0$, also ist die einzige Lösung $x = 0$, $y = 0$. Daher ist \mathcal{B} linear unabhängig und somit eine Basis von \mathbb{R}^2 .

- (b) Die Übergangsmatrix T und Ihre Inverse T^{-1} sind

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad T^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von T sind die Elemente von \mathcal{B} in \mathcal{E} ausgedrückt.

- (c) Die Darstellungsmatrix $[f]_{\mathcal{B}}$ von f bezüglich \mathcal{B} ist

$$[f]_{\mathcal{B}} = T^{-1}AT = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 31 & -12 \\ 70 & -31 \end{pmatrix}.$$

22. Sei V der reelle Vektorraum, der von den Funktionen \cos und \sin aufgespannt wird. $\mathcal{B} = \{\cos(x), \sin(x)\}$ ist eine Basis von V .

- (a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[g]_{\mathcal{B}}$ der Abbildung

$$g : V \rightarrow V, \quad y(x) \mapsto y''(x) - y'(x) - 2y(x)$$

bezüglich der Basis \mathcal{B} .

- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie mithilfe von (a) die Lösung $y \in V$ von

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 10 \cos(x). \quad (i)$$

- (c) [3 Punkte] Verwandeln Sie die homogene Gleichung

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0. \quad (h)$$

in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung und bestimmen Sie so die allgemeine Lösung von (h).

- (d) [2 Punkte] Wie lautet demnach die allgemeine Lösung von (i)?

Lösung:

- (a) Wir berechnen

$$g(\cos(x)) = -\cos(x) + \sin(x) - 2\cos(x) = -3\cos(x) + \sin(x),$$

$$g(\sin(x)) = -\sin(x) - \cos(x) - 2\sin(x) = -\cos(x) - 3\sin(x).$$

Es folgt daraus, dass

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (b) Benutze Gauss oder

$$[g]_{\mathcal{B}}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

um die partikuläre Lösung $y(x) = -3\cos(x) - \sin(x)$ zu finden.

- (c) Mit $y_0 = y, y_1 = y'$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der entsprechenden Matrix ist gegeben durch $p(\lambda) = -\lambda(1 - \lambda) - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$, also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$. Daher lautet die allgemeine Lösung von (h)

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

- (d) Die allgemeine Lösung von (i) ist gegeben durch

$$y(x) = -3\cos(x) - \sin(x) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

23. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:

$$\langle p, q \rangle := 2 \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-2x} dx.$$

- (a) [7 Punkte] Wenden Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf \mathcal{B} an, um eine Orthonormalbasis \mathcal{B}' zu erhalten.

Hinweis: Es gilt $2 \int_0^\infty x^n e^{-2x} dx = 2^{-n} n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei wie üblich $0! = 1$.

- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie alle Elemente von \mathcal{P}_2 , die auf $p(x) := x^2 - 1$ orthogonal stehen.

Lösung:

- (a) Es folgt unmittelbar aus dem Hinweis, dass

$$\begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle & \langle 1, x^2 \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle & \langle x, x^2 \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle & \langle x^2, x \rangle & \langle x^2, x^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Folglich ist also $\tilde{b}_1 = b_1 = 1$. Jetzt berechnen wir

$$\tilde{b}_2 = x - \langle x, 1 \rangle 1 = x - \frac{1}{2},$$

und die Norm von \tilde{b}_2 ist

$$\|\tilde{b}_2\|_2^2 = 2 \int_0^\infty (x - \frac{1}{2})^2 e^{-2x} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Somit erhält man die normalisierte Version $b_2 = 2x - 1$.

Im dritten Schritt ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{b}_3 &= x^2 - \langle x^2, 1 \rangle 1 - \langle x^2, 2x - 1 \rangle (2x - 1) \\ &= x^2 - \frac{1}{2} - (2x - 1) \\ &= x^2 - 2x + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

und man kann berechnen, dass $\|\tilde{b}_3\|_2 = \frac{1}{2}$. Der dritte Basisvektor ist dann

$$b_3 = 2x^2 - 4x + 1.$$

Wir haben also die Orthonormalbasis

$$\mathcal{B}' = \{1, 2x - 1, 2x^2 - 4x + 1\}.$$

(b) Sei $q(x) = ax^2 + bx + c$ ein allgemeines Element von \mathcal{P}_2 . Dann ist

$$\begin{aligned}\langle p, q \rangle &= 2 \int_0^\infty (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)e^{-2x} dx \\ &= 2 \int_0^\infty (ax^4 + bx^3 + (c - a)x^2 - bx - c)e^{-2x} dx \\ &= \frac{3}{2}a + \frac{3}{4}b + \frac{1}{2}(c - a) - \frac{1}{2}b - c = a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}c.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\langle p, q \rangle = 0$ genau dann, wenn $c = 2a + \frac{b}{2}$. Wir schließen daraus, dass

$$(x^2 - 1)^\perp = \{ax^2 + bx + (2a + \frac{b}{2}) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$