

# Lösungen zu Prüfung

## Lineare Algebra I/II für D-MAVT

1. Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen  $\times$  erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, so streichen Sie es einfach irgendwie durch (bis es kein Kreuzchen mehr ist:-)

Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind,  $-1$  falls nicht alle Kreuzchen richtig sind und  $0$  falls sie unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf  $0$  auf.

**WICHTIG: Die Reihenfolge der Teilaufgaben a)-j) kann von der auf Ihrem Prüfungsblatt abweichen.**

	wahr	falsch
a) Die Polynome $\{(x+1)^2, x^2+1, (x-1)^2\}$ im Vektorraum $P_2$ der Polynome vom Grad $\leq 2$ sind linear unabhängig.		×
Die Polynome $\{(x+1)^2, x^2+1, (x-1)^2\}$ erzeugen $P_2$ .		×
b) Die Polynome $\{(x+1)^2, (x-1)^2, (x+2)^2\}$ in $P_2$ sind linear unabhängig.	×	
Die Polynome $\{(x+1)^2, (x-1)^2, (x+2)^2\}$ erzeugen $P_2$ .	×	
c) Die Polynome $\{x^2-1, x^2+x, x+1, x-1\}$ in $P_2$ sind linear unabhängig.		×
Die Polynome $\{x^2-1, x^2+x, x+1, x-1\}$ erzeugen $P_2$ .	×	
d) Ist die Matrix $A$ halbeinfach, so auch $A^3$ .	×	
e) Drei Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ sind linear unabhängig genau dann wenn sie paarweise linear unabhängig sind (also wenn die drei Pärchen $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_1\}$ , linear unabhängig sind).		×
f) Jeder Vektor des Vektorraums $\mathbb{R}$ bildet eine Basis für diesen eindimensionalen Raum.		×
g) Der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist $3$ , denn jede Dimension/Komponente im Zielraum wird "getroffen".		×
h) Gilt für eine $3 \times 3$ -Matrix $A$ und eine Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ , dass $Av_i \neq 0$ für $i = 1, 2, 3$ , so liegt nur der Nullvektor im Kern von $A$ .		×
i) Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det A$ , denn die Determinante ist eine lineare Abbildung.		×
j) Hat eine $3 \times 3$ -Matrix nur einen Eigenwert $\lambda$ mit geometrischer Vielfachheit $3$ , so kann das nur die Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sein.	×	

**Bitte wenden!**

2. Sei  $V$  der von den Funktionen  $\{1, x, x^2, e^x\}$  aufgespannte Vektorraum mit dem Unterraum  $U := \text{span}\{1, x, x^2\}$ . Für zwei Funktionen  $f, g \in V$  sei das folgende Skalarprodukt definiert:

$$\langle f, g \rangle := f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(0)g''(0) + f'''(0)g'''(0).$$

- Wie lautet die Norm von  $f \in V$  bezüglich des gegebenen Skalarprodukts?
- Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis in  $U$  bezüglich des gegebenen Skalarprodukts.
- Bestimmen Sie die beste Approximation der Funktion  $e^x$  in  $U$ , d.h. bestimmen Sie die Funktion  $f \in U$ , so dass deren Abstand (in der Norm) zu  $e^x$  minimal ist.
- Verifizieren Sie, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tatsächlich ein Skalarprodukt ist.

a)  $\sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{(f(0))^2 + (f'(0))^2 + (f''(0))^2 + (f'''(0))^2}$  per Definition

- b) Wir benutzen das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren um eine Orthonormalbasis von  $U$  zu erhalten.

Die ersten beiden Vektoren 1 und  $x$  sind bereits orthonormal (zueinander) wegen  $\langle 1, 1 \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$ ,  $\langle x, x \rangle = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$  und  $\langle 1, x \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$ . Nun ist sogar  $\langle 1, x^2 \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 0$  und  $\langle x, x^2 \rangle = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 0$  und wir müssen nur noch  $x^2$  normieren. Da  $\langle x^2, x^2 \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 4$  ist  $\{1, x, \frac{x^2}{2}\}$  eine Orthonormalbasis in  $U$ .

Natürlich ist auch jede andere Orthonormalbasis eine gültige Lösung; wendet man jedoch das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren in irgend einer Reihenfolge auf die Vektoren  $1, x, x^2$  an, erhält man immer obige Lösung.

- c) Bekanntlich reicht es dafür  $e^x$  orthogonal auf den Unterraum  $U$  zu projizieren. Die orthogonale Projektion ist gegeben durch

$$f \mapsto \langle f, 1 \rangle \cdot 1 + \langle f, x \rangle \cdot x + \langle f, x^2/2 \rangle \cdot x^2/2 = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0) \cdot x^2/2$$

und für  $f(x) = e^x$  ergibt dies  $1 + x + x^2/2$ . Dies ist unabhängig davon, welche Orthonormalbasis man in a) bestimmt hat.

- d) Es sind i) Symmetrie, ii) Bilinearität und iii) positive Definitheit zu prüfen.

i)

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(0)g''(0) + f'''(0)g'''(0) \\ &= g(0)f(0) + g'(0)f'(0) + g''(0)f''(0) + g'''(0)f'''(0) = \langle g, f \rangle \end{aligned}$$

- ii) Wegen Symmetrie reicht es die Linearität im ersten Argument zu prüfen.

$$\begin{aligned} \langle \lambda f + g, h \rangle &= [\lambda f + g](0)h(0) + [\lambda f + g]'(0)h'(0) \\ &\quad + [\lambda f + g]''(0)h''(0) + [\lambda f + g]'''(0)h'''(0) \\ &= (\lambda f(0) + g(0))h(0) + (\lambda f'(0) + g'(0))h'(0) \\ &\quad + (\lambda f''(0) + g''(0))h''(0) + (\lambda f'''(0) + g'''(0))h'''(0) \\ &= \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

(oder die Bedingungen  $\langle \lambda f, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle$  und  $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$  einzeln prüfen.)

**Siehe nächstes Blatt!**

- iii) Offensichtlich gilt  $\langle f, f \rangle \geq 0$  und  $\langle 0, 0 \rangle = 0$ ; es bleibt  $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f \equiv 0$  zu zeigen. Ein beliebiges  $f \in V$  lässt sich schreiben als  $f(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 e^x$ . Die Gleichung  $\langle f, f \rangle = 0$ , also  $(f(0))^2 + (f'(0))^2 + (f''(0))^2 + (f'''(0))^2 = 0$ , ist äquivalent zum Gleichungssystem  $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 0, f'''(0) = 0$  und mit obigem Ausdruck für  $f$  ergibt dies  $\lambda_1 + \lambda_4 = 0, \lambda_2 + \lambda_4 = 0, 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0, \lambda_4 = 0$ . Es folgt  $\lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$  und somit  $f \equiv 0$ .

### 3. Gegeben sei die quadratische Form

$$q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto q(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \quad \text{wobei } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die symmetrische Matrix  $A$  so, dass  $q(x) = x^\top A x$ .  
b) Ein Kegelschnitt  $Q$  ist gegeben durch

$$q(x) + a^\top x = 0, \quad \text{wobei } a^\top = (12, 24).$$

Bringen Sie den Kegelschnitt  $Q$  durch eine Hauptachsentransformation und eine Translation auf Normalform.

- c) Zeichnen Sie den Kegelschnitt  $Q$  im ursprünglichen  $x$ -Koordinatensystem.

- a)  $A$  muss eine  $2 \times 2$ -Matrix sein, sonst ist  $x^\top A x$  nicht definiert, also ist  $A$  von der Gestalt  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  (die Symmetrie wird ja verlangt). Mit

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

und Koeffizientenvergleich ergibt dies  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

- b) Zuerst diagonalisieren wir die Matrix  $A$ . Die Eigenwerte von  $A$  sind die Nullstellen von

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6,$$

also  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$ . EV zum EW 1 ist  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , EV zum EW 6 ist  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Die Matrix  $T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  ist eine orthogonale Koordinatentransformations-Matrix vom Eigensystem (nennen wir dies das  $y$ -Koordinatensystem) in das ursprüngliche  $x$ -Koordinatensystem:  $x = Ty$ . Im  $y$ -Koordinatensystem lautet der Kegelschnitt somit

$$q(Ty) + a^\top Ty = (Ty)^\top A(Ty) + a^\top Ty = y_1^2 + 6y_2^2 + \frac{60}{\sqrt{5}}y_2 = 0.$$

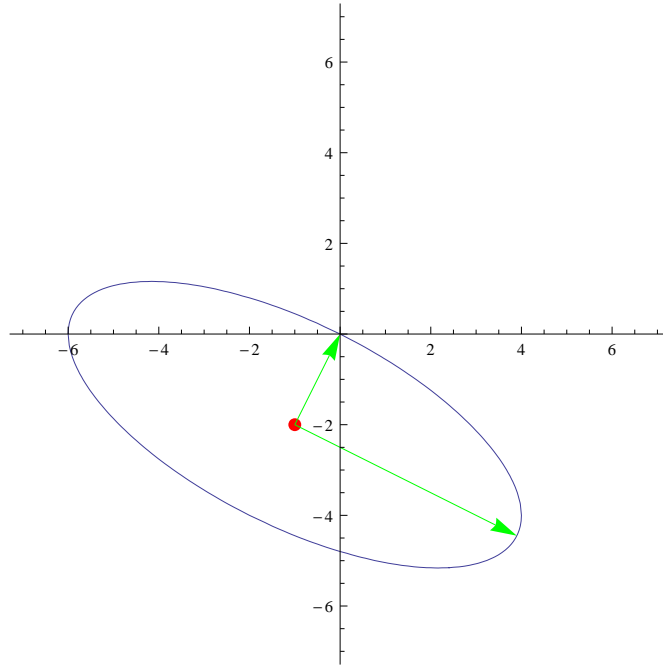
Wir ergänzen quadratisch um den  $y_2$ -Term zu eliminieren und bekommen

$$y_1^2 + 6(y_2 + \sqrt{5})^2 - 30 = 0$$

was einer Translation  $y + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = z$  des  $y$ -Koordinatensystems in ein  $z$ -Koordinatensystem entspricht. Schliesslich erhalten wir eine Normalform im  $z$ -Koordinatensystem

$$\frac{z_1^2}{30} + \frac{z_2^2}{5} = 1.$$

- c) An der Normalform lässt sich ablesen, dass der Kegelschnitt eine Ellipse mit Halbachsenlängen  $\sqrt{5}$  und  $\sqrt{30}$  ist. Der Mittelpunkt der Ellipse ist bei  $z = 0$ , was in  $y$ -Koordinaten  $y = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$  und in  $x$ -Koordinaten  $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  ist. Die Richtung der kleinen Halbachse ist im  $z$ - und  $y$ -Koordinatensystem  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und im  $x$ -System folglich  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Die grosse Halbachse steht natürlich senkrecht dazu. Dies ergibt folgendes Bild (beachte, dass der Kegelschnitt durch den Nullpunkt geht)



4. Sei  $P_2$  der Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $B = \{1, x, x^2\}$ . Sei

$$L : P_2 \rightarrow P_2, \quad p(x) \mapsto p''(x) + 4p'(x) + 3p(x)$$

- Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von  $L$  bezüglich der Basis  $B$ .
- Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von  $L^{-1}$  bezüglich der Basis  $B$ .
- Verwandeln Sie die Differentialgleichung

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = f(x) \tag{*}$$

in ein System 1. Ordnung und bestimmen Sie dessen Lösungsraum für  $f(x) \equiv 0$ .

- Finden Sie diejenige Lösung  $y(x)$  von (\*) für  $f(x) = 18x \in P_2$  mit  $y(0) = y'(0) = 0$ .

a) 
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1/3 & -4/9 & 26/27 \\ 0 & 1/3 & -8/9 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

c) Wir setzen  $y_0 := y$  und  $y_1 := y'$  und erhalten

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung  $0 = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \lambda I_2\right) = -\lambda(-4 - \lambda) + 3$  hat  $-1$  und  $-3$  als Lösungen. Die Eigenvektoren obiger Matrix sind  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  zum EW  $-1$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  zum EW  $-3$ . Damit erhalten wir die allgemeine homogene Lösung des Differentialgleichungssystems

$$C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und

$$C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

als homogene Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (\*).

d) Benutze  $L^{-1}$  um die partikuläre Lösung  $y(x) = 6x - 8$  zu finden. Die allgemeine Lösung von (\*) ist somit  $6x - 8 + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$  und es bleiben die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  mittels der Gleichungen  $y(0) = y'(0) = 0$  zu bestimmen.  $y(0) = -8 + C_1 + C_2 = 0$  und  $y'(0) = 6 - C_1 - 3C_2 = 0$  haben die Lösung  $C_1 = 9, C_2 = -1$  und wir erhalten schliesslich

$$6x - 8 + 9e^{-x} - e^{-3x}$$

als Lösung von d).

5. Gegeben seien die folgenden Unterräume von  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{aligned} U &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0\} \\ V &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 + 5x_3 + 2x_4 = -2x_2 \text{ und} \\ &\quad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0\} \end{aligned}$$

- Berechnen Sie  $\dim(U \cap V)$ .
- Geben Sie eine Basis des Unterraums  $U + V$  an.
- Finden Sie eine Matrix  $A$ , so dass  $U + V$  der Kern von  $A$  ist.
- Finden Sie eine Matrix  $B$ , so dass  $U$  das Bild von  $B$  ist.
- Finden Sie eine singuläre Matrix  $C$ , so dass  $U$  ein Eigenraum von  $C$  zum Eigenwert 1 ist, wobei 1 geometrische und algebraische Vielfachheit 3 hat.

Der Unterraum  $V$  wird durch zwei Gleichungen beschrieben. Bildet man die Differenz des 2-fachen der ersten und 3-fachen der zweiten Gleichung, so ergibt dies

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0;$$

also gilt  $V \subset U$ , denn jeder Vektor in  $V$  erfüllt auch die Gleichung welche  $U$  definiert.

**Bitte wenden!**

- a) Der Unterraum  $U \cap V$  ist gleich  $V$ , wegen obiger Bemerkung, und die kurze Rechnung

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 5/3 & 5/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

zeigt sofort, dass der Kern dieser Matrix zweidimensional ist und somit  $\dim(U \cap V) = 2$ .

- b)  $U + V$  ist gleich  $U$ , und da dieser Raum durch eine nichttriviale Gleichung definiert wird, ist er 3-dimensional. Wir benötigen somit 3 linear unabhängige Vektoren die  $x_2 + x_3 + x_4 = 0$  erfüllen. z.B. also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

- c) Da  $U + V = U$  ist, suche wir eine Matrix mit  $\text{Kern } A = U$ . Die Gleichung die  $U$  definiert, lässt sich mit der  $1 \times 4$ -Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  als  $Ax = x_2 + x_3 + x_4 = 0$  schreiben; also ist der Kern von  $A$  genau  $U$ .
- d) Wir haben bereits bei b) eine Basis für  $U (=U + V)$  bestimmt und daher ist z.B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung, denn die Spaltenvektoren spannen das Bild auf.

- e) Die orthogonale Projektion auf  $U$  erfüllt die geforderten Bedingungen. Den dann ist  $U$  ein invarianter Unterraum, also Eigenraum zum Eigenwert 1 und diese Projektion ist sicher nicht invertierbar, also singulär. Wir projizieren entlang der Normale  $n = 1/\sqrt{3}(0, 1, 1, 1)^\top$  auf die Hyperebene  $U$ , formal ist dies

$$x \mapsto x - nn^\top x$$

Die Matrix dazu lautet

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kan man auch mit der Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

starten. Dieses hat einen 3-dimensionalen 1-Eigenraum und ist singulär. Hat man weiter eine invertierbare Matrix  $T$ , die diesen Eigenraum auf  $U$  abbildet, z.B.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

so ist  $TDT^{-1}$  eine Lösung.