

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

AC

Vorname

TO

Legi-Nr.

XX-925-465

Prüfungs-Nr.

001

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

BA

Vorname

JA

Legi-Nr.

XX-918-388

Prüfungs-Nr.

002

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$
- (B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$
- (C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$
- (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

- (A) $(1, 2, 0)^T.$
- (B) $(3, 1, -1)^T.$
- (C) $(-1, 1, 0)^T.$
- (D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.
- (B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f)).$
- (C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m.$
- (D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

D A N I

Vorname

N I

Legi-Nr.

XX-919-997

Prüfungs-Nr.

003

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

- (A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.
- (B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.
- (C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- (A) $a = -4$.
- (B) $a = 4$.
- (C) $a = 8$.
- (D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) $3, -1, 1/2$.
- (B) $-3, 1, -1/2$.
- (C) $1/3, 1, -2$.
- (D) $-1/3, -1, -2$.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f)).$

(C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

EL

Vorname

FL

Legi-Nr.

XX-922-793

Prüfungs-Nr.

004

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

- (A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.
- (B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.
- (C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- (A) $a = -4$.
- (B) $a = 4$.
- (C) $a = 8$.
- (D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f)).$

(C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

Vorname

Legi-Nr.

GR

AN

XX-924-526

Prüfungs-Nr.

005

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

HO

Vorname

ET

Legi-Nr.

XX-952-345

Prüfungs-Nr.

006

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

IL

Vorname

DU

Legi-Nr.

XX-923-710

Prüfungs-Nr.

007

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

- (A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.
- (B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.
- (C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- (A) $a = -4$.
- (B) $a = 4$.
- (C) $a = 8$.
- (D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f)).$

(C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

JO

Vorname

LE

Legi-Nr.

XX-929-062

Prüfungs-Nr.

008

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f)).$

(C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

KL

Vorname

JA

Legi-Nr.

XX-922-652

Prüfungs-Nr.

009

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f)).$

(C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

Vorname

Legi-Nr.

KL

MA

XX-951-545

Prüfungs-Nr.

010

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

- (A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.
- (B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.
- (C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- (A) $a = -4$.
- (B) $a = 4$.
- (C) $a = 8$.
- (D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- (C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

- (A) $(1, 2, 0)^T$.
- (B) $(3, 1, -1)^T$.
- (C) $(-1, 1, 0)^T$.
- (D) $(1, 3, 2)^T$.

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.
- (B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$.
- (C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.
- (D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

Vorname

Legi-Nr.

KÖ

RA

XX-918-940

Prüfungs-Nr.

011

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

- (A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.
- (B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.
- (C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- (A) $a = -4$.
- (B) $a = 4$.
- (C) $a = 8$.
- (D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

Vorname

Legi-Nr.

MACO

XX-952-477

Prüfungs-Nr.

012

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

Vorname

Legi-Nr.

MAJE

XX-727-656

Prüfungs-Nr.

013

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

NI

Vorname

RO

Legi-Nr.

XX-744-652

Prüfungs-Nr.

014

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- (C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

- (A) $(1, 2, 0)^T$.
- (B) $(3, 1, -1)^T$.
- (C) $(-1, 1, 0)^T$.
- (D) $(1, 3, 2)^T$.

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.
- (B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$.
- (C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.
- (D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

Vorname

Legi-Nr.

PE

DE

XX-942-215

Prüfungs-Nr.

015

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

PE

Vorname

CO

Legi-Nr.

XX-934-294

Prüfungs-Nr.

016

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

PF

Vorname

DE

Legi-Nr.

XX-606-888

Prüfungs-Nr.

017

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

PI

Vorname

JE

Legi-Nr.

XX-936-752

Prüfungs-Nr.

018

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

Vorname

Legi-Nr.

SÄ

PA

XX-925-325

Prüfungs-Nr.

019

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) $3, -1, 1/2$.
- (B) $-3, 1, -1/2$.
- (C) $1/3, 1, -2$.
- (D) $-1/3, -1, -2$.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

SC

Vorname

OL

Legi-Nr.

XX-914-761

Prüfungs-Nr.

020

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

SC

Vorname

ED

Legi-Nr.

XX-951-719

Prüfungs-Nr.

021

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

SC

Vorname

SA

Legi-Nr.

XX-936-702

Prüfungs-Nr.

022

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

ST

Vorname

SA

Legi-Nr.

XX-917-546

Prüfungs-Nr.

023

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

- (A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.
- (B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.
- (C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- (A) $a = -4$.
- (B) $a = 4$.
- (C) $a = 8$.
- (D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

SU

Vorname

CA

Legi-Nr.

XX-927-953

Prüfungs-Nr.

024

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- (C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

- (A) $(1, 2, 0)^T$.
- (B) $(3, 1, -1)^T$.
- (C) $(-1, 1, 0)^T$.
- (D) $(1, 3, 2)^T$.

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.
- (B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$.
- (C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.
- (D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

SU

Vorname

NI

Legi-Nr.

XX-932-008

Prüfungs-Nr.

025

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

- (A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.
- (B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.
- (C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- (A) $a = -4$.
- (B) $a = 4$.
- (C) $a = 8$.
- (D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

Vorname

Legi-Nr.

TH RE

XX-947-980

Prüfungs-Nr.

026

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

TH

Vorname

JU

Legi-Nr.

XX-937-169

Prüfungs-Nr.

027

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f)).$

(C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

TR

Vorname

SE

Legi-Nr.

XX-951-594

Prüfungs-Nr.

028

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

Vorname

Legi-Nr.

WOLU

XX-937-903

Prüfungs-Nr.

029

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

Vorname

Legi-Nr.

W O M A

XX-057-604

Prüfungs-Nr.

030

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

- (A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.
- (B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.
- (C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- (A) $a = -4$.
- (B) $a = 4$.
- (C) $a = 8$.
- (D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

ZI

Vorname

SO

Legi-Nr.

XX-934-579

Prüfungs-Nr.

031

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

- (A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.
- (B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.
- (C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- (A) $a = -4$.
- (B) $a = 4$.
- (C) $a = 8$.
- (D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f)).$

(C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

AL

Vorname

AL

Legi-Nr.

XX-659-994

Prüfungs-Nr.

032

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f)).$

(C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

II

Vorname

LU

Legi-Nr.

XX-650-446

Prüfungs-Nr.

033

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f)).$

(C) Wenn $\text{ker}(f) \perp \text{ker}(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\text{ker}(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

TO

Vorname

GI

Legi-Nr.

XX-648-085

Prüfungs-Nr.

034

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

- (A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.
- (B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.
- (C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- (A) $a = -4$.
- (B) $a = 4$.
- (C) $a = 8$.
- (D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T.$

(B) $(3, 1, -1)^T.$

(C) $(-1, 1, 0)^T.$

(D) $(1, 3, 2)^T.$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f)).$

(C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

**XX-XXX-
XXX**

Prüfungs-Nr.

035

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 8$.

(D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- (C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

- (A) $(1, 2, 0)^T$.
- (B) $(3, 1, -1)^T$.
- (C) $(-1, 1, 0)^T$.
- (D) $(1, 3, 2)^T$.

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.
- (B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$.
- (C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.
- (D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto x f''(x) + 2 f'(x) + 2 f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

**XX-XXX-
XXX**

Prüfungs-Nr.

036

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

- (A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.
- (B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.
- (C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- (A) $a = -4$.
- (B) $a = 4$.
- (C) $a = 8$.
- (D) $a = -8$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- (C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

- (A) $(1, 2, 0)^T$.
- (B) $(3, 1, -1)^T$.
- (C) $(-1, 1, 0)^T$.
- (D) $(1, 3, 2)^T$.

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.
- (B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$.
- (C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.
- (D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

- (A) 2
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die

Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
- (D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
- (C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
- (D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:
- $$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).
23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \longmapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.
- (b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

- (c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).