

Basisprüfung Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Die Prüfung dauert **120 Minuten**.

Die Multiple Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie **1 Punkt**, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie **0 Punkte**.

Die Handaufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

Bitte wenden!

1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Das Matrixexponential e^A ist gegeben durch

✓ (a) $\begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} \log(2) & 0 & 0 \\ 0 & \log(3) & 0 \\ 0 & 0 & \log(4) \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} e^{\log(2)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\log(3)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\log(4)} \end{pmatrix}.$

(d) $\begin{pmatrix} e^2 & e^2 & e^2 \\ e^3 & e^3 & e^3 \\ e^4 & e^4 & e^4 \end{pmatrix}.$

Erklärung: Wir wissen aus der Vorlesung, dass für eine Diagonalmatrix $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gilt

$$e^A = \text{diag}(e_1^\lambda, e_2^\lambda, e_3^\lambda).$$

Folglich ist (a) die richtige Antwort.

Siehe nächstes Blatt!

2. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $A^2 = \mathbb{1}_2$ für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist

- (a) 1.
- (b) 2.
- (c) 4.
- ✓ (d) ∞ .

Erklärung: Man rechnet nach, dass für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}^2 = \mathbb{1}_2.$$

Man kann auch geometrisch feststellen, dass die zweifache Hintereinanderausführung der selben Spiegelung an einer beliebigen Ursprungsgeraden die Identitätsabbildung darstellt, und davon gibt es unendlich viele.

3. Auf dem Raum \mathcal{P}_2 der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 sei ein Skalarprodukt definiert durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{3} \int_{-1}^2 f(x)g(x) dx.$$

Der Unterraum $\text{Span}\{1, x^2\}$ hat eine Orthonormalbasis gegeben durch

- ✓ (a) $\{1, \sqrt{\frac{5}{6}}(x^2 - 1)\}$
- (b) $\{1, \sqrt{\frac{5}{11}}x^2\}$
- (c) $\{\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{5}{6}}(x^2 - 1)\}$
- (d) $\{\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{5}{11}}x^2\}$

Erklärung: Dies ergibt sich durch simples Nachrechnen: Es ist

$$\langle 1, 1 \rangle = 1, \quad \left\langle 1, \sqrt{\frac{5}{6}}(x^2 - 1) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \sqrt{\frac{5}{6}}(x^2 - 1), \sqrt{\frac{5}{6}}(x^2 - 1) \right\rangle = 1.$$

Die Antworten (c) und (d) fallen unmittelbar heraus, da $\frac{1}{3}$ offenbar nicht normiert ist.

Bitte wenden!

4. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte

- ✓ (a) 4 mit geometrischer Vielfachheit 1 und 8 mit algebraischer Vielfachheit 2.
- (b) 0, 4 und 8 jeweils mit geometrischer Vielfachheit 1.
- (c) 4 mit algebraischer Vielfachheit 2 und 8 mit algebraischer Vielfachheit 1.
- (d) 4 mit geometrischer Vielfachheit 2 und 8 mit geometrischer Vielfachheit 1.

Erklärung: Das charakteristische Polynom p von A berechnet sich direkt zu

$$p(\lambda) = (8 - \lambda)(4 - \lambda)(8 - \lambda).$$

Folglich ist (a) die richtige Antwort.

5. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

aus der vorherigen Aufgabe ist

- (a) halbeinfach, aber nicht einfach.
- (b) einfach, aber nicht halbeinfach.
- (c) halbeinfach und einfach.
- ✓ (d) weder halbeinfach noch einfach.

Erklärung: Wir wissen bereits, dass A den Eigenwert 8 mit algebraischer Vielfachheit 2 hat. Folglich ist die Matrix nicht einfach. Ferner berechnet man

$$A - 8\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat offenbar den Rang 2 und der Eigenwert 8 folglich die geometrische Vielfachheit 1. Somit ist A auch nicht halbeinfach und (d) die richtige Antwort.

6. Eine Basis des Kerns von

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$

✓ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$

Erklärung: Durch Einsetzen stellt man direkt fest, dass $(1, 7, 2)^T$ im Kern von A liegt, die anderen Vektoren hingegen nicht. Da die ersten beiden Spalten von A linear unabhängig sind, hat A mindestens den Rang 2 und folglich ist (b) die korrekte Antwort.

7. Es sei erneut

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis des Bildes der transponierten Matrix A^T von A ist gegeben durch

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$

✓ (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$

Erklärung: Aus der vorherigen Aufgabe wissen wir bereits, dass das Bild von A^T die Dimension 2 hat. Damit fallen die Antwortmöglichkeiten (b) und (d) heraus. Das Bild von A^T wird also von zwei linear unabhängigen Zeilen von A aufgespannt. Folglich wird es auch von (c) aufgespannt, nicht jedoch von (a), wie eine kurze Rechnung ergibt.

8. Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^2$ der Unterraum aller Vektoren, die senkrecht auf dem Vektor $v = (3, -7)^T$ stehen. Die Orthogonalprojektion des Vektors $w = (-10, 4)^T \in \mathbb{R}^2$ auf V ist

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

✓ (d) $\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Erklärung: V wird aufgespannt von dem Vektor $(7, 3)^T$. Die Projektion P auf V sendet den Vektor w auf

$$Pw = \frac{-58}{58} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Antwort (d) ist daher richtig.

9. Welche der folgenden Aussagen über den Hamming-Code $\text{Ham}(3)$ ist wahr?

(a) Er kann 3 Fehler erkennen.

✓ (b) Zwei verschiedene Elemente von $\text{Ham}(3)$ unterscheiden sich an mindestens 3 Stellen.

(c) Jedes Element besteht aus genau 3 Bits.

(d) Es ist nicht möglich, dass ein Element von $\text{Ham}(3)$ genau 3 Einsen enthält.

Erklärung: Siehe Vorlesung 5, Lineare Algebra II.

Siehe nächstes Blatt!

10. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- (a) Es gibt lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^{2019} \rightarrow \mathbb{R}^{2018}$ und $g : \mathbb{R}^{2018} \rightarrow \mathbb{R}^{2019}$ derart, dass $g \circ f$ die Identität ist.
- ✓ (b) Es gibt lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^{2019} \rightarrow \mathbb{R}^{2018}$ und $g : \mathbb{R}^{2018} \rightarrow \mathbb{R}^{2019}$ derart, dass $f \circ g$ die Identität ist.
- (c) Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{2019} \rightarrow \mathbb{R}^{2018}$ mit $\ker f = \{0\}$.
- (d) Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{2017} \rightarrow \mathbb{R}^{2019}$ mit $\dim \operatorname{im} f = 2018$.

Erklärung: Zu (b): Man kann zum Beispiel für g die Abbildung wählen, die in den ersten 2018 Komponenten die Identität ist und in der letzten Komponente die Nullabbildung. Weiter wählt man dann für f die Projektion auf die ersten 2018 Komponenten. Dann ist $f \circ g$ die Identität.

Zu (a): Der Rang der Komposition zweier Abbildungen ist nach oben beschränkt durch das Minimum der Ränge beider Abbildungen. Daher hat $g \circ f$ höchstens den Rang 2018 und kann nicht die Identität sein.

Zu (c) und (d): Beide Aussagen widersprechen dem Rangsatz.

11. Es sei $I : \text{span}\{x, x^2\} \rightarrow \text{span}\{x^2, x^3\}$ die Abbildung, die ein Polynom p auf seine Stammfunktion (mit Integrationskonstante 0) abbildet. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a) I ist linear.
- (b) I ist invertierbar.
- ✓ (c) I hat die Eigenwerte 2 und 3.
- (d) Die Komposition $I \circ d$ ist die Identität auf $\text{span}\{x^2, x^3\}$, wobei d die Abbildung $p(x) \mapsto p'(x)$ bezeichnet.

Erklärung: I ist sicherlich linear, wie aus den Rechenregeln für Stammfunktionen bekannt ist. Folglich ist die Antwort nicht (a). Die Darstellungsmatrix von I bezüglich der gegebenen Basen ist

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

denn $I(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $I(x^2) = \frac{1}{3}x^3$. Die Abbildung I ist also invertierbar, aber mit Eigenwerten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, sodass (c) in der Tat falsch ist, (b) hingegen richtig. Das Inverse von I ist d , wie aus der Analysis bekannt ist, und (d) ist somit auch nicht die Antwort.

12. Die Gleichung

$$x^2 + 8xy - 5y^2 = 3$$

beschreibt

- ✓ (a) Eine Hyperbel.
- (b) Eine Parabel.
- (c) Eine Ellipse.
- (d) Die leere Menge.

Erklärung: Die Matrix, die zu obiger Gleichung assoziiert ist, ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A berechnet sich zu

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(-5 - \lambda) - 16 = \lambda^2 + 4\lambda - 21 = (\lambda - 3)(\lambda + 7).$$

Die Eigenwerte von A sind daher 3 und -7 und die Gleichung beschreibt eine Hyperbel.

13. Wir betrachten den \mathbb{R}^3 bezüglich der Standardbasis mit Koordinaten x_1, x_2, x_3 . Es sei f die Spiegelung an der Ebene $x_3 = 0$ und g die Spiegelung an der Ebene $x_2 = x_3$. Ferner seien D_f bzw. D_g die Darstellungsmatrizen von f bzw. g . Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(a) $D_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

(b) $D_g^2 = \mathbb{1}_3.$

(c) $D_{f \circ g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

✓ (d) Die Komposition $f \circ g \circ f \circ g$ ist die Identität.

Erklärung: Man berechnet

$$D_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich sind die Aussagen (a), (b) und (c) wahr (wobei (b) klar ist, da es sich um eine Spiegelung handelt). Genauso folgt

$$D_{f \circ g \circ f \circ g} = D_{f \circ g}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \mathbb{1}_3,$$

d.h. (d) ist in der Tat falsch.

Siehe nächstes Blatt!

14. Es sei $n > 1$. Welche der folgenden Mengen ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{n \times n}$?

- (a) $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A = 0\}$.
- (b) $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \text{ orthogonal}\}$.
- ✓ (c) $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{Der obere linke Eintrag von } A \text{ verschwindet}\}$.
- (d) $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{Ein Eintrag von } A \text{ verschwindet}\}$.

Erklärung: Zu (c): Die Eigenschaft ist abgeschlossen bezüglich Addition und Skalarmultiplikation und definiert folglich einen Unterraum.

Zu (a): Man kann z.B. die Matrix wählen, die im oberen linken Eintrag eine 1 und sonst nur 0 hat, sowie diejenige Matrix, die auf allen anderen Diagonaleinträgen den Wert 1 hat und sonst überall 0. Beide Matrizen haben Determinante 0, aber deren Summe ist die Identität.

Zu (b): Die Nullmatrix ist nicht orthogonal, daher kann diese Menge keinen Unterraum bilden.

Zu (d): Man kann z.B. zwei Matrizen wählen, die in allen Einträgen bis auf einen (verschiedenen!) den Wert 1 haben. Deren Summe hat dann keinen verschwindenden Eintrag.

15. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist eine Norm, die ein Skalarprodukt induziert?

✓ (a) $\|x\|_a := \sqrt{x^T A x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\|x\|_b := \sqrt{x^T B x}$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\|x\|_c := |x_1| + |x_2|$.

(d) $\|x\|_d := \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

Erklärung: Zu (a): Die Matrix A ist positiv definit, wie man leicht mithilfe des Hurwitz-Kriteriums erkennt, und induziert daher ein Skalarprodukt mit der Norm aus (a).

Zu (b): Die Matrix B ist positiv semidefinit, aber nicht positiv definit. Zum Beispiel gilt $\|(0, 1)^T\|_b = 0$. Die Abbildung ist daher keine Norm.

Zu (c) und (d): Man prüft leicht nach, dass beide Normen nicht die Parallelogrammgleichung erfüllen und somit kein Skalarprodukt induzieren.

16. Welche Dimension hat der Lösungsraum des folgenden Differentialgleichungssystems?

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2' - y_3 \\ y_2'' &= y_1 + 52y_3 \\ y_3' &= -2y_2.\end{aligned}$$

(a) 1.

(b) 2.

(c) 3.

✓ (d) 4.

Erklärung: Setzt man $z = (y_1, y_2, y_2', y_3)^T$, so erhält man ein equivalentes DGLS erster Ordnung $z' = Az$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 52 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses hat einen Lösungsraum der Dimension 4, sodass (d) die richtige Antwort ist.

17. Es seien

$$U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

und

$$V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ definiert eine Basis von $U + V$.

✓ (b) Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^4$, der auf allen Elementen von V orthogonal ist, ist auch auf allen Elementen von U orthogonal.

(c) $U \cap V = V$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Erklärung: Mithilfe des Gauss-Verfahrens sieht man

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & -10 \\ 6 & 8 & 12 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -6 & -22 \\ 0 & -4 & -6 & -22 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -6 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich hat $U + V$ den Rang 2 und U ist in V enthalten. Insbesondere ist (a) falsch.

(c) ist auch falsch, stattdessen gilt $U \cap V = U$ aufgrund obiger Rechnung.

Aus $U \subseteq V$ folgt (b) unmittelbar.

Siehe nächstes Blatt!

18. Welche der folgenden Abbildungen ist nicht linear?

- (a) Spur : $\mathbb{R}^{4 \times 4} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) Spur : $\mathbb{R}^{1 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$.
- ✓ (c) $\det : \mathbb{R}^{4 \times 4} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (d) $\det : \mathbb{R}^{1 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Erklärung: Die Spur ist immer eine lineare Abbildung, daher sind (a) und (b) nicht die gesuchten Antworten. Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A),$$

woraus folgt, dass die Abbildung in (d) linear ist, jene in (c) hingegen nicht.

19. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Matrizen ist invers zu A ?

- ✓ (a) $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 7 \\ -3 & 1 & 4 \\ -13 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.
- (b) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -7 \\ 3 & -1 & -4 \\ 13 & -4 & -16 \end{pmatrix}$.
- (c) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
- (d) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -4 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Erklärung: Dies prüft man leicht nach durch Multiplikation der jeweiligen Matrizen.

Bitte wenden!

20. Auf dem Raum \mathcal{P}_{2019} der reellen Polynome vom Grad ≤ 2019 sei die Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathcal{P}_{2019} &\rightarrow \mathcal{P}_{2019}, \\ P &\mapsto (x \mapsto P(1/2)) \end{aligned}$$

gegeben, die ein Polynom P abbildet auf das konstante Polynom mit Wert $P(1/2)$. Wir betrachten \mathcal{P}_{2019} mit der $L^\infty[0, 1]$ -Norm

$$\|P\|_{L^\infty[0,1]} := \max_{x \in [0,1]} |P(x)|.$$

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a) T ist eine lineare Abbildung.
- (b) T ist eine Projektion, d.h. es gilt $T \circ T = T$.
- ✓ (c) T ist eine Kontraktion, d.h. es gibt $c < 1$ derart, dass für alle $P, Q \in \mathcal{P}_{2019}$ gilt

$$\|T(P) - T(Q)\|_{L^\infty[0,1]} \leq c \|P - Q\|_{L^\infty[0,1]}.$$

- (d) $\dim \text{Bild } T = 1$.

Erklärung: Zu (a): T ist sicherlich eine lineare Abbildung, denn es gilt

$$T(P + Q) = (P + Q)(1/2) = P(1/2) + Q(1/2) = T(P) + T(Q)$$

und

$$T(\lambda P) = (\lambda P)(1/2) = \lambda P(1/2) = \lambda T(P).$$

Zu (b): T ist eine Projektion, denn es gilt

$$(T \circ T)P = T(x \mapsto P(1/2)) = (x \mapsto P(1/2)) = P(f).$$

Zu (c): T ist keine Kontraktion, denn mit $P \equiv 1$ und $Q \equiv 0$ folgt

$$\|T(P) - T(Q)\|_{L^\infty[0,1]} = |P(1/2) - Q(1/2)| = 1 = \|P - Q\|_{L^\infty[0,1]}.$$

Folglich kann kein solches $c < 1$ existieren.

Zu (d): Das Bild von T wird vom konstanten Polynom 1 erzeugt und hat daher Dimension 1.

Siehe nächstes Blatt!

21. [10 Punkte] Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 3 & 0 \\ 0 & 3 & a & 2 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

- a) [4 Punkte] Bestimmen Sie die Determinante von A . Für welche Werte von a ist A invertierbar?
Hinweis: Nachdem Sie die Determinante berechnet haben, können Sie die Substitution $b = a^2$ verwenden. Ferner gilt $17^2 - 4 \cdot 16 = 15^2$.
- b) [4 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenwerte von A , sowie einen Eigenvektor Ihrer Wahl. Für welche Werte von a ist A halbeinfach bzw. einfach?
Hinweis: Für die Berechnung der Eigenwerte können Sie indirekt a) verwenden.
- c) [2 Punkte] Für welche Werte von a ist A positiv semidefinit bzw. positiv definit?

Lösung: a) Durch Entwickeln nach der ersten Zeile erhalten wir

$$\det A = a \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a(a^3 - 4a - 9a) - 2(2a^2 - 8) = a^4 - 17a^2 + 16.$$

Wir substituieren $b = a^2$ wie im Hinweis und berechnen als Nullstellen des Polynoms $b^2 - 17b + 16$

$$b_{1,2} = \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{17^2}{4} - 16} = \frac{17 \pm 15}{2}$$

und damit $b_1 = 16$, $b_2 = 1$. Die Nullstellen des ursprünglichen Polynoms sind folglich

$$a_1 = 4, \quad a_2 = -4, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = -1.$$

Die Matrix A ist also invertierbar für $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 4, \pm 1\}$.

b) Um das charakteristische Polynom zu bestimmen, berechnet man wie üblich die Determinante von $A - \lambda \mathbb{I}$. Aber diese Matrix hat auf der Diagonalen einfach $a - \lambda$ anstelle von a , und wir haben die Determinante von A bereits berechnet. Es ergibt sich als charakteristisches Polynom also

$$p_A(\lambda) = (a - \lambda)^4 - 17(a - \lambda)^2 + 16$$

und als Nullstellen also

$$\lambda_1 = 4 + a, \quad \lambda_2 = -4 + a, \quad \lambda_3 = 1 + a, \quad \lambda_4 = -1 + a.$$

Insbesondere ist die Matrix für jeden Wert von A einfach (und damit auch halbeinfach). Die zugehörigen Eigenvektoren berechnen sich zu

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Wir haben bereits die Eigenwerte berechnet und müssen sicherstellen, dass diese nichtnegativ bzw. positiv sind. Die Matrix ist also positiv semidefinit für $a \geq 4$ und positiv definit für $a > 4$.

Bitte wenden!

22. [10 Punkte] Gegeben sei die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y'''(x) = -y'(x) - 10y(x).$$

- a) **[2 Punkte]** Verwandeln Sie die obige Differentialgleichung in ein äquivalentes Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Welche Dimension hat der Lösungsraum?
- b) **[5 Punkte]** Geben Sie die allgemeine Lösung des Systems aus a) an.
Hinweis: Das Polynom $x^3 + x + 10$ hat eine Nullstelle bei $x = -2$.
- c) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie eine Lösung des Systems zu den Anfangswerten $y(0) = -16$, $y'(0) = 30$, $y''(0) = 10$.

Lösung: a) Setzt man $(z_1, z_2, z_3)^T = (y, y', y'')^T$, so ergibt sich das äquivalente Differentialgleichungssystem erster Ordnung $z' = Az$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses besitzt einen Lösungsraum der Dimension 3.

b) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda + 10$. Der Hinweis sagt uns, dass ein Eigenwert $\lambda_1 = -2$ ist. Polynomdivision ergibt

$$p(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = (\lambda + 2)(\lambda - (1 + 2i))(\lambda - (1 - 2i)).$$

Wir erhalten also als weitere Eigenwerte $\lambda_2 = 1 + 2i$ und $\lambda_3 = 1 - 2i$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 - 4i \\ 5 - 10i \\ 25 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 + 4i \\ 5 + 10i \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Folglich haben wir die allgemeine Lösung

$$z(x) = Ae^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + Be^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} -3 - 4i \\ 5 - 10i \\ 25 \end{pmatrix} + Ce^{(1-2i)x} \begin{pmatrix} -3 + 4i \\ 5 + 10i \\ 25 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$y(x) = A'e^{-2x} + B'e^{(1+2i)x} + C'e^{(1-2i)x}.$$

c) Wir suchen nach einer Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 - 4i & -3 + 4i \\ -2 & 5 - 10i & 5 + 10i \\ 4 & 25 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Mithilfe des Gauss-Verfahrens berechnet man

$$A = -10, \quad B = 1, \quad C = 1.$$

Das Anfangswertproblem hat also die Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= -10e^{-2x} + (-3 - 4i)e^{(1+2i)x} + (-3 + 4i)e^{(1-2i)x} \\ &= -10e^{-2x} - 6e^x \cos 2x + 8e^x \sin 2x. \end{aligned}$$

23. [10 Punkte] Gegeben sei die quadratische Funktion $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - \sqrt{5}x_1 + \sqrt{5}x_2 - \frac{11}{20}.$$

a) **[2 Punkte]** Finden Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sowie $a \in \mathbb{R}^2$ und $b \in \mathbb{R}$ derart, dass gilt

$$q(x) = x^T A x + a^T x + b.$$

b) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A . Geben Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D an derart, dass $T^{-1}AT = D$ gilt.

c) **[4 Punkte]** Bringen Sie den Kegelschnitt $q(x) = 0$ durch Hauptachsentransformation und Translation in Normalform. Geben Sie die Koordinatentransformation zwischen den neuen und den alten Koordinaten an.

d) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie den Scheitelpunkt dieses Kegelschnitts in den ursprünglichen (x_1, x_2) -Koordinaten.

Lösung: a) An den Koeffizienten von q liest man ab, dass

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad b = -\frac{11}{20}$$

gilt.

b) Das charakteristische Polynom von A berechnet sich zu

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5).$$

Die Eigenwerte von A sind folglich $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 5$. Die zugehörigen Eigenvektoren von A sind gegeben durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ferner ist $T^{-1} = T^T = T$.

c) Wir wählen zunächst die neuen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen den linearen Teil in den neuen Koordinaten:

$$-\sqrt{5}x_1 + \sqrt{5}x_2 = ay_1 + by_2$$

Siehe nächstes Blatt!

und erhalten

$$a = 3, \quad b = -1.$$

Dies ergibt in den (y_1, y_2) -Koordinaten den Kegelschnitt

$$5y_1^2 + 3y_1 - y_2 - \frac{11}{20} = 0.$$

Quadratische Ergänzung liefert dann die Umformung

$$5 \left(y_1 + \frac{3}{10} \right)^2 - y_2 - 1 = 0$$

und nach Translation

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

landen wir bei der Normalform

$$5z_1^2 - z_2 = 0$$

mit

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x_1 + 2x_2) + \frac{3}{10}, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + x_2) + 1.$$

Diese beschreibt eine Parabel.

Bemerkung: Es genügt, als Normalenform auf einen Ausdruck der Form

$$5z_1^2 - z_2 = c$$

für eine Konstante c zu kommen (zum Beispiel $c = 1$). Daher ist auch eine Translation um $(\frac{3}{10}, 0)^T$ (oder einem beliebigen anderen Wert statt 0) an Stelle von $(\frac{3}{10}, 1)^T$ zugelassen. Dies gilt dann auch für die Koordinatentransformation zwischen neuen und alten Koordinaten. Der Scheitelpunkt ändert sich dadurch natürlich nicht.

d) Der Scheitelpunkt liegt bei $(z_1, z_2)^T = (0, 0)^T$. Transformiert man dies zurück in die alten Koordinaten, so ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -17 \\ -16 \end{pmatrix}.$$