

Basisprüfung

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Die Prüfung dauert **120 Minuten**.

Die Multiple Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie **1 Punkt**, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie **0 Punkte**.

Die Handaufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

1. Betrachte das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -x - y + z &= 1 \\ -x - y + z &= -1 \\ -x - y &= 0. \end{aligned}$$

Es gilt:

- (a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.
- (b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.
- (c) Das lineare Gleichungssystem hat genau drei unterschiedliche Lösungen.
- (d) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

Bitte wenden!

2. Es seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Welcher der folgenden Vektoren ergänzt v_1, v_2 zu einer Basis des \mathbb{R}^3 ?

(a) $(-1, 0, 1)^t$.

(b) $(-1, 1, 2)^t$.

(c) $(1, 1, 0)^t$.

(d) $(1, 1, 1)^t$.

3. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wie lautet der Eintrag a_{12} der Matrix A ?

(a) -1 .

(b) 1 .

(c) 2 .

(d) 0 .

Siehe nächstes Blatt!

4. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Mengen ist *kein* Untervektorraum von \mathbb{R}^2 ?

- (a) $\ker(A)$.
- (b) $\operatorname{Im}(A)$.
- (c) $\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
- (d) $\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

5. Die 3×3 -Matrix A erfülle $A^2 = A$. Für welche der folgenden Matrizen gilt *immer* $B^2 = B$?

- (a) $B = \mathbb{I}_3 + A$.
- (b) $B = \mathbb{I}_3 - A$.
- (c) $B = 2A$.
- (d) $B = A + A^t$.

Bitte wenden!

6. Es seien die Basen

$$\mathcal{B} = (4x, 2x^2 - 4x + 1, 3x^2 + 3x + 1) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}' = (x^2, x, 1)$$

von \mathcal{P}_2 gegeben, wobei \mathcal{P}_2 den reellen Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich zwei bezeichnet. Welche der folgenden Matrizen entspricht der Übergangsmatrix von \mathcal{B} nach \mathcal{B}' ?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

7. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welcher der folgenden Vektoren liegt im Kern von A ?

(a) $(1, -1, 2, 5)^t.$

(b) $(-1, -1, 2, 5)^t.$

(c) $(1, -1, 2, -5)^t.$

(d) $(1, -1, -2, 5)^t.$

Siehe nächstes Blatt!

8. Welcher der folgenden Vektoren liegt *nicht* im Bild der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}?$$

(a) $(-4, 4, -2)^t$.

(b) $(1, 1, 1)^t$.

(c) $(3, 1, 1)^t$.

(d) $(-1, 5, -1)^t$.

9. Es sei eine Basis b_1, b_2, b_3 von \mathbb{R}^3 gegeben durch

$$b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne e_1, e_2, e_3 die Orthonormalbasis, die man erhält wenn man das Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren auf b_1, b_2, b_3 (in dieser Reihenfolge) anwendet. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $e_3 = (1, 0, 0)^t$.

(b) $e_3 = (0, 1, 0)^t$.

(c) $e_3 = (0, 0, 1)^t$.

(d) $e_3 = (0, 0, -1)^t$.

10. Gegeben seien zwei orthonormale Vektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

- (a) Die Vektoren $u_1 - u_2$ und $u_1 + u_2$ sind orthogonal.
- (b) Die Vektoren u_1 und $u_1 + u_2$ sind orthogonal.
- (c) Die Vektoren $u_1 - u_2$ und u_2 sind orthogonal.
- (d) Die Vektoren $u_1 - 2u_2$ und $u_1 + 2u_2$ sind orthogonal.

11. Es bezeichne \mathcal{P}_2 den reellen Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich zwei. Die Abbildung $F: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ sei gegeben durch

$$p \mapsto p' \quad (\text{die Ableitung von } p).$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- (a) $\text{im}(F) = \mathcal{P}_2$.
- (b) $\ker(F) = \{0\}$.
- (c) F ist bijektiv.
- (d) F ist linear.

12. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Was ist $\det(A)$?

- (a) -1 .
- (b) 0 .
- (c) 1 .
- (d) 2 .

13. Es sei A eine invertierbare 3×3 Matrix mit reellen Einträgen. Es bezeichne A^t die Transponierte von A . Welche der folgenden Aussagen ist *immer* korrekt?

- (a) Die Matrix $A - A^t$ ist invertierbar.
- (b) Die Matrix A^t ist invertierbar.
- (c) Die Matrix $A + \mathbb{I}_3$ ist invertierbar.
- (d) Die Matrix $A + A^t$ ist invertierbar.

14. Es sei

$$U := \{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} : A^t = -A\}$$

der Untervektorraum von $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ bestehend aus den schiefsymmetrischen Matrizen. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- (a) $\dim(U) = 10$.
- (b) $\dim(U) = 6$.
- (c) $\dim(U) = 12$.
- (d) $\dim(U) = 3$.

15. Betrachte folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 - y_2 - y_3 \\y_2' &= -y_1 + 2y_2 - y_3 \\y_3' &= -y_1 - y_2 + 2y_3.\end{aligned}$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum des obigen Differentialgleichungssystems?

- (a) 0.
- (b) 1.
- (c) 2.
- (d) 3.

16. Die Abbildung $\|\cdot\|_\infty: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \max_{i=1,2,3} |x_i|$$

ist eine Norm auf \mathbb{R}^3 . Was ist

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|_\infty ?$$

- (a) -5 .
- (b) 5 .
- (c) 9 .
- (d) 4 .

17. Es sei A eine reelle 3×3 -Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist *immer* korrekt?

- (a) $\det(A) = \det(-A^t)$.
- (b) $\det(-A) = \det(A)$.
- (c) $\det(A + A^t) = \det(A) + \det(A^t)$.
- (d) $\det(A - A^t) = \det(A) - \det(A^t)$.

18. Wir definieren die Menge

$$M := \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A^t = A \text{ und } A^3 = \mathbb{I}_3\}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- (a) Die Menge M enthält unendlich viele Elemente.
- (b) Die Menge M enthält keine Elemente.
- (c) Die Menge M enthält genau ein Element.
- (d) Die Menge M enthält genau zwei Elemente.

Hinweis: Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.

19. Es sei A eine reelle 5×5 -Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist *immer* richtig?

- (a) Die Matrix A ist diagonalisierbar.
- (b) Die Matrizen A und A^t haben denselben Rang.
- (c) Die Matrizen A und A^t haben dasselbe Bild.
- (d) Die Matrizen A und A^t haben denselben Kern.

20. Es seien A und B zwei ähnliche Matrizen. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

- (a) Falls $A = 0$, dann gilt $B = 0$.
- (b) Falls $A^3 = \mathbb{I}$ ist, dann gilt ebenfalls $B^3 = \mathbb{I}$.
- (c) Falls $\det(A) = 1$, dann gilt $\det(B) = 1$.
- (d) Falls A eine Diagonalmatrix ist, dann ist B ebenfalls eine Diagonalmatrix.

Siehe nächstes Blatt!

21. Es sei der Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

- (a) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie eine Basis von U .
- (b) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U .
- (c) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $b := (1, -1, 0)^t$ auf U .
- (d) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $b := (1, -1, -1)^t$ auf U .

22. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $y' = Ay$ wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) **(4 Punkte)** Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ der Matrix A und die Eigenwerte von A .
- (b) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.
- (c) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y(0)$, für welche die zugehörige Lösung $y(t)$ gegen Null strebt für $t \rightarrow +\infty$.

23. Es bezeichne $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die quadratische Form

$$q(x) = x_1^2 - 2\sqrt{6}x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3^2, \quad \text{wobei } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix A , so dass $q(x) = x^t Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
- (b) **(5 Punkte)** Eine Quadrik Q ist gegeben durch $q(x) = 1$. Führen Sie die Hauptachsentransformation $x = Ty$ durch und geben Sie die Normalform von Q an.
- (c) **(3 Punkte)** Skizzieren Sie die Quadrik Q im y -Koordinatensystem und berechnen Sie die Schnittpunkte der y -Koordinatenachsen mit der Quadrik Q .

