

D-MAVT/MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-000-000

Prüfungs-Nr.

000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/9 \\ -1/9 & 1/3 & -1/9 \\ -2/9 & 4/9 & -1/9 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2/3 \\ -1/3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1/3 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \\ -2/3 & 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$

1.MC2 [1 Punkt] Welche der folgenden Mengen von \mathbb{R}^3 ist **kein** Untervektorraum?

(A) $\{s(1, 0, 0) + t(0, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\}.$

(B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 5y + z = 0\}.$

(C) $\{(x, y, xy) : x, y \in \mathbb{R}\}.$

1.MC3 [1 Punkt] Welche Aussage gilt im Allgemeinen?

(A) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zu einander.

(B) Jede diagonalisierbare Matrix ist invertierbar.

(C) Die Inverse einer symmetrischen invertierbaren Matrix ist symmetrisch.

1.MC4 [1 Punkt] Seien $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

(A) $B^T A.$

(B) $BA^T.$

(C) $A + B.$

1.MC5 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y + z = 9 \\ x + y + (a^2 - 5)z = a \end{cases}$$

- (A) Das lineare Gleichungssystem hat für keinen Wert von a unendlich viele Lösungen.
- (B) $a = \sqrt{6}$.
- (C) $a \neq \pm\sqrt{6}$.

1.MC6 [1 Punkt] Falls $\det \begin{pmatrix} 3 & d & a+2d \\ 3 & e & b+2e \\ 15 & 5f & 5c+10f \end{pmatrix} = 60$. Dann ist $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \dots$

Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaften der Determinante, um die eine Matrix in die andere umzuformen.

- (A) -4 .
- (B) 4 .
- (C) -1 .

1.MC7 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ und $B \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$. Welche Aussage ist korrekt?

- (A) Die Dimension des Bildes von AB ist höchstens 2.
- (B) Falls der Kern von BA nur aus dem Nullvektor besteht, so gilt es auch für den Kern von B .
- (C) Falls A den Rang 2 hat, so hat auch BA den Rang 2.

1.MC8 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y''' - 2y'' + y' = 0. \quad (*)$$

Welche Dimension hat der Raum $\{y : y \text{ löst } (*) \text{ und } y(0) = 1, y'(0) = 0\}$?

- (A) 0.
- (B) 1.
- (C) 2.

1.MC9 [1 Punkt] Welche Dimension hat der Lösungsraum des folgenden Differentialgleichungssystems?

$$\begin{cases} y_1'' = y_1 + y_3 \\ y_3'' = y_1 \\ y_2' = y_1' + y_3'. \end{cases}$$

- (A) 2.
- (B) 3.
- (C) 5.

1.MC10 [1 Punkt] Betrachten Sie die quadratische Form $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$. Der durch $q(x_1, x_2) = 8$ gegebene Kegelschnitt ist...

- (A) eine Ellipse.
- (B) eine Hyperbel.
- (C) eine Parabel.

1.MC11 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^{-1}$?

- (A) $-1/3, 1, -2$.
- (B) $1/3, 1, -2$.
- (C) $-1/3, -1, -2$.

1.MC12 [1 Punkt] Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Betrachten Sie die Abbildung $f : V \rightarrow V$, $p(x) \mapsto p(x) - p'(x) - 2p(0)$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

Hinweis: Betrachten Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis $\{1, x, x^2\}$.

- (A) f ist keine lineare Abbildung.
- (B) Die Eigenwerte von f sind 1 und -1 .
- (C) Die Inverse Abbildung von f bildet x^2 zu $x^2 + 2x - 1$.

1.MC13 [1 Punkt] Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 . Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f : p \mapsto \int_{-1}^1 p(x) dx$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{1, x, x^2, x^3\}$ von V und $\{1\}$ von \mathbb{R} ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.MC14 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix A ?

(A) $(-2, 1, 2)^T$.

(B) $(2, 5, 1)^T$.

(C) $(-1, 0, 1)^T$.

1.MC15 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix A . Welche Aussage ist **nicht** korrekt?

(A) Falls der Kern von f nur aus dem Nullvektor besteht, so ist $m \geq n$.

(B) Falls $m < n$, dann ist $\text{im}(f) = \mathbb{R}^m$.

(C) Falls $\text{rank } A = n$, dann sind die Spalten von A linear unabhängig.

1.MC16 [1 Punkt] Seien A, B invertierbare 2×2 Matrizen mit $\det A = 27$ und $B^3 = A^T$. Dann ist die Determinante von $2B^{-1}AB^T A^{-1}B$ gleich ...

(A) 12

(B) 3

(C) 27^3

1.MC17 [1 Punkt] Seien $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ diagonalisierbare Matrizen mit den Eigenwerten 1 und 2. Welche der folgenden Aussagen ist dann im Allgemeinen **falsch**?

- (A) Es existiert eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $TBT^{-1} = A$.
- (B) Es gilt $AB = BA$.
- (C) Es gilt $\text{Spur}(A - B) = 0$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix}$ eine 4×5 Matrix mit den Spalten v_1, \dots, v_5 . Es gelte $v_2 = v_1 + v_3$ und $2v_4 = v_1 - v_2$. Dann gilt...

- (A) $\text{rank}(A) \leq 3$ und $\dim \ker A \geq 2$.
- (B) $\text{rank}(A) \geq 2$ und $\dim \ker A \leq 3$.
- (C) $\text{rank}(A) \geq 3$ und $\dim \ker A \leq 2$.

1.MC19 [1 Punkt] $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ bilden die Basis eines zweidimensionalen Unterraums von \mathbb{R}^3 . Wie lauten die Koordinaten von $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ bezüglich $\{v_1, v_2\}$?

- (A) $(3, 1)^T$.
- (B) $(2, -1)^T$.
- (C) v wird nicht von v_1 und v_2 aufgespannt.

1.MC20 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit reellen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Welche Aussage gilt im Allgemeinen?

- (A) A ist diagonalisierbar.
- (B) A ist symmetrisch.
- (C) A ist invertierbar.

1.MC21 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) Alle Eigenräume von A sind 1-dimensional.
- (B) A hat n verschiedene Eigenwerte.
- (C) Es existiert eine Basis für \mathbb{R}^n , die aus Eigenvektoren von A besteht.

1.MC22 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der reellen Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
- (B) $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$.
- (C) $\langle p, q \rangle = \int_{-2}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^3 p(x)q(x)dx$.

1.MC23 [1 Punkt] Sei P_1 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 1 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

Die Orthogonalprojektion von x auf den Vektor 1 bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{1}{2}$.
- (B) x .
- (C) 0.

1.MC24 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ eine Matrix mit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \dots$$

- (A) $(-1, 2, 2)^T$
- (B) $(-2, 2, 3)^T$
- (C) Diese Informationen genügen nicht, um $A \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ zu berechnen.

1.MC25 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen wahr?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp (v_1 - v_2)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.

Aufgabe 2

Textaufgaben für FS24

26. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} b & a-b & a+b \\ b & -b & b \\ 2b-a & a-b & b \end{pmatrix}$$

mit zwei Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) [2 Punkte] Für welche reellen Werte a, b ist A *nicht* invertierbar?
 - (b) [4 Punkte] Finden Sie eine Basis für das Bild von A in Abhängigkeit der Parameter a und b .
 - (c) [2 Punkte] Seien $a = 1$ und $b = 0$. Begründen Sie, warum A dann diagonalisierbar ist.
 - (d) [2 Punkte] Seien $a = 2$ und $b = 1$. Finden Sie eine Basis von Kern A .
27. Sei V der von den Funktionen $\{1, x, e^x\}$ aufgespannte reelle Vektorraum mit dem Unterraum $U := \text{span}\{1, e^x\}$. Für zwei Funktionen $f, g \in V$ sei das folgende Skalarprodukt definiert:

$$\langle f, g \rangle := f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(0)g''(0).$$

- (a) [3 Punkte] Verifizieren Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt definiert.
 - (b) [2 Punkte] Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren auf die Basis $\mathcal{B} := \{1, e^x\}$ von U an, um eine Orthonormalbasis $\tilde{\mathcal{B}}$ von U zu erhalten.
 - (c) [3 Punkte] Vervollständigen Sie $\tilde{\mathcal{B}}$ zu einer Orthonormalbasis $\tilde{\mathcal{C}}$ von V .
 - (d) [2 Punkte] Sei $\pi : V \rightarrow V$ die Orthogonalprojektion auf U . Sei $\mathcal{C} := \{1, x, e^x\}$. Was ist die Darstellungsmatrix $[\pi]_{\mathcal{C}}$ von π bezüglich der Basis \mathcal{C} ?
28. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + 4y_2. \end{aligned}$$

- (a) [3 Punkte] Schreiben Sie das System in der Form $y' = Ay$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und bestimmen Sie die Eigenwerte sowie die zugehörige Eigenvektoren von A .
- (b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems $y' = Ay$ für die Matrix A aus (a).