

Die Single Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie 0 Punkte. **Insbesondere lohnt es sich zu raten!**

1. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a)  $\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx$  ist ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum der stetigen reellen Funktionen  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- (b)  $\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx$  ist ein Skalarprodukt auf  $P$ , dem Raum der Polynome.
- (c)  $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 2 \cdot f(x) \cdot g(x) \, dx$  ist ein Skalarprodukt auf  $P_3$ , dem Raum der Polynome vom Grad  $\leq 3$ .
- (d)  $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$  ist ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$ .

2. Welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums von reellen Funktionen  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  ist *kein* Untervektorraum?

- (a)  $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(1) = 0\}$
- (b)  $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(0) = 1\}$
- (c)  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- (d)  $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist von der Form } f(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}\}$

3. Sei  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  eine Matrix mit charakteristischem Polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 1.$$

Welche Aussage gilt für  $\det(A)$ ?

- (a)  $\det(A) = 1$
- (b)  $\det(A) = 2$
- (c)  $\det(A) = -1$
- (d)  $\det(A) = -2$

4. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Mengen ist eine Basis für  $\ker(A)$ .

(a)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

(b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) Die leere Menge.

5. Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  habe bezüglich der Basis  $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$  die Koordinaten  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Die Koordinaten von  $v$  bezüglich der Standardbasis sind dann ...

(a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c)  $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

(d)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. Welcher Vektor ergänzt die Menge

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

zu einer Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$ ?

(a)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)^T$

(b)  $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T$

(c)  $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$

(d)  $(1, 0, 0)^T$

7. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ?

- (a)  $(-2, 1, 1)^T$
- (b)  $(0, 3, 2)^T$
- (c)  $(1, -2, 1)^T$
- (d)  $(0, 1, 1)^T$

8. Sei  $A$  die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

und  $q_A$  die quadratische Form von  $A$ . Welche Aussage ist dann *falsch*?

- (a) Die quadratische Form  $q_A$  ist indefinit.
- (b) Die Matrix  $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$  hat dieselbe Signatur wie die Matrix  $A$ .
- (c) Es gilt  $\max_{\|x\|_2=1} q_A(x) = 7$ .
- (d)  $q_A(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2$ .

9. Für welchen Wert von  $a \in \mathbb{R}$  ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

orthogonal?

- (a)  $-1$
- (b)  $\sqrt{2}$
- (c)  $1$
- (d) Es gibt kein  $a \in \mathbb{R}$  so, dass die Matrix orthogonal ist.

10. Sei  $V \subset \mathbb{R}^3$  der Untervektorraum mit der Basis  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . Was ist die Orthogonalprojektion des Vektors  $(1, 2, 3)^T$  auf  $V$  bezüglich des Standardskalarprodukts auf  $\mathbb{R}^3$ ?

- (a)  $\left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right)^T$
- (b)  $(0, 2, 0)^T$
- (c)  $(1, 2, 0)^T$
- (d)  $(1, 2, 3)^T$

11. Sei  $U := \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = A^T \text{ und } \text{spur}(A) = 0\}$ . Welche der folgenden Aussagen ist *wahr*?

- (a)  $\dim U = 6$
- (b)  $\dim U = 5$
- (c)  $\dim U = 3$
- (d) Die Menge  $U$  ist kein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

12. Was ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e & 4 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{17} & \pi & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -\sqrt{3} & e \\ 7 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a)  $\sqrt{2}$
- (b)  $\sqrt{2} + e$
- (c) 0
- (d)  $-e^2 + \sqrt{2} - \pi\sqrt{2}$

13. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $n > 1$  eine quadratische Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen *falsch*?

- (a) Wenn  $A$  symmetrisch ist, dann ist für jeden Eigenwert von  $A$  die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit.
- (b) Falls  $n$  ungerade ist hat  $A$  einen reellen Eigenwert.
- (c) Wenn die Anzahl verschiedener reeller Nullstellen des charakteristischen Polynoms von  $A$  gleich  $n$  ist, dann ist  $A$  diagonalisierbar.
- (d) Falls  $n$  gerade ist hat  $A$  einen reellen Eigenwert.

14. Sei  $n > 1$ . Welche der folgenden Aussagen gilt *nicht* allgemein für  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

- (a)  $\det(AB) = \det(BA)$ .
- (b)  $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$  falls  $\det(A) \neq 0$ .
- (c)  $\det(\det(A)B) = \det(A) \det(B)$ .
- (d)  $\det(AB) = \det(A^T) \cdot \det(B)$

15. Welches ist die Inverse der Matrix  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

(a)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

16. Für welches  $a \in \mathbb{R}$  ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$$

halbeinfach, aber nicht einfach?

(a)  $a = 0$

(b)  $a = 9$

(c)  $a = 1$

(d)  $a = 6$

17. Welchen Wert hat die Determinante der Matrix  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ?

(a) 3

(b) -4

(c) -3

(d) 4

18. Betrachten Sie die Abbildung  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen ist *wahr*?

- (a) Die Abbildung  $f$  beschreibt eine Translation mit dem Vektor  $(1, 2, 3)^T$  gefolgt von einer Drehung um 45 Grad um die  $x_3$ -Achse
- (b) Die Abbildung  $f$  ist linear.
- (c) Die Abbildung  $f$  beschreibt eine Rotation um 45 Grad um die  $x_3$ -Achse gefolgt von einer Translation mit dem Vektor  $(1, 2, 3)^T$ .
- (d) Die Abbildung  $f$  beschreibt eine Spiegelung an der  $x_1x_2$ -Ebene gefolgt von einer Translation mit dem Vektor  $(1, 2, 3)^T$ .

19. Sei  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  eine Matrix, die ähnlich zu

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist, das heisst,  $A = T^{-1}BT$  für eine reguläre Matrix  $T$ . Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen *falsch*?

- (a)  $A$  ist nicht diagonalisierbar.
- (b)  $\text{spur}(A) = 6$ .
- (c)  $A$  hat die gleichen Eigenvektoren wie  $B$ .
- (d)  $A$  hat die gleichen Eigenwerte wie  $B$ .

20. Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , sodass  $Ax = 0$  *nur* die triviale Lösung hat. Welche Aussage ist dann sicher korrekt?

- (a) Für das Bild gilt:  $\dim(\text{im } A) = 0$ .
- (b) Für den Kern gilt:  $\dim(\ker A) = m$ .
- (c) Es gilt:  $\dim(\text{im } A) + \dim(\ker A) = mn$ .
- (d) Für das Bild gilt:  $\dim(\text{im } A) = n$ .

Die Handaufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

21. (10 Punkte) Betrachten Sie für  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha \neq -\frac{1}{4}$  die Differentialgleichung

$$y'' = \alpha y + y'. \quad (1)$$

- (a) (2 Punkte) Überführen Sie (1) durch Substitution in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Form  $z' = Az$ , wobei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .  
(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte der in Teilaufgabe (a) gefundenen Matrix  $A$ .

*Bemerkung:* Falls Sie die Matrix  $A$  in (a) nicht bestimmen konnten, rechnen Sie mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4\alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

- (c) (3 Punkte) Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von  $\alpha$ , die allgemeine Lösung von (1).  
*Bemerkung:* Falls Sie die Eigenwerte in Teil (b) nicht bestimmen konnten, verwenden Sie als Eigenwerte  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{4+16\alpha}}{2}$ .  
(d) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung von (1) mit  $\alpha = 2$  und der Anfangsbedingung  $y(0) = 1, y'(0) = -1$ .

22. (10 Punkte) Betrachten Sie die Abbildung  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$ , gegeben durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ .

- a) (3 Punkte) Finden Sie die Eigenwerte von  $A$  sowie die zugehörigen Eigenvektoren. Ist  $A$  diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.  
b) (2 Punkte) Bestimmen Sie eine Basis vom Bild im  $A$  und Kern  $\ker A$ .  
c) (3 Punkte) Gegeben sei die Basis  $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2, -e_3, e_2 + e_3)$  von  $\mathbb{R}^3$ . Finden Sie die Übergangsmatrix  $T$  von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{E}$  (d.h. die Matrix  $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , welche Koordinaten bezüglich  $\mathcal{B}$  auf Koordinaten bezüglich  $\mathcal{E}$  abbildet) und ihre Inverse  $T^{-1}$ .  
d) (2 Punkte) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix  $[F]_{\mathcal{B}}$  von  $F$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .  
23. (10 Punkte) Auf dem Vektorraum  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  der reellen  $2 \times 2$ -Matrizen sei folgendes Skalarprodukt gegeben:

$$\langle A, B \rangle := \text{spur}(A^T B) \text{ für } A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Sei  $\|A\| := \sqrt{\langle A, A \rangle}$  die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm.

- (a) (2 Punkte) Verifizieren Sie, dass für jede Matrix  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  gilt, dass  $\|M\| = \|M^T\|$ .  
(b) (4 Punkte) Sei  $S \subset V$  der Unterraum der reellen symmetrischen  $2 \times 2$ -Matrizen. Die Menge

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis von  $S$ . Berechnen Sie aus  $B$  mit Hilfe des Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis von  $S$ .

- (c) (4 Punkte) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  auf den Unterraum  $S$ .

*Bemerkung:* Falls Sie Teil (b) nicht lösen konnten, verwenden Sie statt  $S$  den Raum  $S' \subset V$  mit der Orthonormalbasis

$$B' := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$