

Die Single Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie 0 Punkte. **Insbesondere lohnt es sich zu raten!**

1. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a) **(Richtig)** $\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx$ ist ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum der stetigen reellen Funktionen $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (b) **(Falsch)** $\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx$ ist ein Skalarprodukt auf P , dem Raum der Polynome.
- (c) **(Falsch)** $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 2 \cdot f(x) \cdot g(x) \, dx$ ist ein Skalarprodukt auf P_3 , dem Raum der Polynome vom Grad ≤ 3 .
- (d) **(Falsch)** $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$ ist ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 .

2. Welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums von reellen Funktionen $F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ ist *kein* Untervektorraum?

- (a) **(Falsch)** $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(1) = 0\}$
- (b) **(Richtig)** $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(0) = 1\}$
- (c) **(Falsch)** $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- (d) **(Falsch)** $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist von der Form } f(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}\}$

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 1.$$

Welche Aussage gilt für $\det(A)$?

- (a) **(Richtig)** $\det(A) = 1$
- (b) **(Falsch)** $\det(A) = 2$
- (c) **(Falsch)** $\det(A) = -1$
- (d) **(Falsch)** $\det(A) = -2$

4. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Mengen ist eine Basis für $\ker(A)$.

(a) (Falsch) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

(b) (Richtig) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(c) (Falsch) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) (Falsch) Die leere Menge.

5. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis sind dann ...

(a) (Falsch) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) (Falsch) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) (Falsch) $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

(d) (Richtig) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. Welcher Vektor ergänzt die Menge

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

zu einer Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 ?

(a) (Falsch) $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)^T$

(b) (Richtig) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T$

(c) (Falsch) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$

(d) (Falsch) $(1, 0, 0)^T$

7. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

- (a) (Falsch) $(-2, 1, 1)^T$
- (b) (Falsch) $(0, 3, 2)^T$
- (c) (Richtig) $(1, -2, 1)^T$
- (d) (Falsch) $(0, 1, 1)^T$

8. Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

und q_A die quadratische Form von A . Welche Aussage ist dann *falsch*?

- (a) (Falsch) Die quadratische Form q_A ist indefinit.
- (b) (Falsch) Die Matrix $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$ hat dieselbe Signatur wie die Matrix A .
- (c) (Falsch) Es gilt $\max_{\|x\|_2=1} q_A(x) = 7$.
- (d) (Richtig) $q_A(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2$.

9. Für welchen Wert von $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

orthogonal?

- (a) (Falsch) -1
- (b) (Falsch) $\sqrt{2}$
- (c) (Falsch) 1
- (d) (Richtig) Es gibt kein $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix orthogonal ist.

10. Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ der Untervektorraum mit der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Was ist die Orthogonalprojektion des Vektors $(1, 2, 3)^T$ auf V bezüglich des Standardskalarprodukts auf \mathbb{R}^3 ?

- (a) (Falsch) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right)^T$
- (b) (Falsch) $(0, 2, 0)^T$
- (c) (Richtig) $(1, 2, 0)^T$
- (d) (Falsch) $(1, 2, 3)^T$

11. Sei $U := \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = A^T \text{ und } \text{spur}(A) = 0\}$. Welche der folgenden Aussagen ist *wahr*?

- (a) (Falsch) $\dim U = 6$
- (b) (Richtig) $\dim U = 5$
- (c) (Falsch) $\dim U = 3$
- (d) (Falsch) Die Menge U ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{3 \times 3}$.

12. Was ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e & 4 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{17} & \pi & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -\sqrt{3} & e \\ 7 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) (Falsch) $\sqrt{2}$
- (b) (Falsch) $\sqrt{2} + e$
- (c) (Richtig) 0
- (d) (Falsch) $-e^2 + \sqrt{2} - \pi\sqrt{2}$

13. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n > 1$ eine quadratische Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen *falsch*?

- (a) (Falsch) Wenn A symmetrisch ist, dann ist für jeden Eigenwert von A die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit.
- (b) (Falsch) Falls n ungerade ist hat A einen reellen Eigenwert.
- (c) (Falsch) Wenn die Anzahl verschiedener reeller Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A gleich n ist, dann ist A diagonalisierbar.
- (d) (Richtig) Falls n gerade ist hat A einen reellen Eigenwert.

14. Sei $n > 1$. Welche der folgenden Aussagen gilt *nicht* allgemein für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (a) (Falsch) $\det(AB) = \det(BA)$.
- (b) (Falsch) $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$ falls $\det(A) \neq 0$.
- (c) (Richtig) $\det(\det(A)B) = \det(A) \det(B)$.
- (d) (Falsch) $\det(AB) = \det(A^T) \cdot \det(B)$

15. Welches ist die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

(a) (Falsch)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) (Falsch)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) (Richtig)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) (Falsch)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

16. Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$$

halbeinfach, aber nicht einfach?

(a) (Falsch) $a = 0$

(b) (Richtig) $a = 9$

(c) (Falsch) $a = 1$

(d) (Falsch) $a = 6$

17. Welchen Wert hat die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$?

(a) (Falsch) 3

(b) (Falsch) -4

(c) (Falsch) -3

(d) (Richtig) 4

18. Betrachten Sie die Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen ist *wahr*?

- (a) **(Falsch)** Die Abbildung f beschreibt eine Translation mit dem Vektor $(1, 2, 3)^T$ gefolgt von einer Drehung um 45 Grad um die x_3 -Achse
- (b) **(Falsch)** Die Abbildung f ist linear.
- (c) **(Richtig)** Die Abbildung f beschreibt eine Rotation um 45 Grad um die x_3 -Achse gefolgt von einer Translation mit dem Vektor $(1, 2, 3)^T$.
- (d) **(Falsch)** Die Abbildung f beschreibt eine Spiegelung an der x_1x_2 -Ebene gefolgt von einer Translation mit dem Vektor $(1, 2, 3)^T$.

19. Sei $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ eine Matrix, die ähnlich zu

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist, das heisst, $A = T^{-1}BT$ für eine reguläre Matrix T . Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen *falsch*?

- (a) **(Falsch)** A ist nicht diagonalisierbar.
- (b) **(Falsch)** $\text{spur}(A) = 6$.
- (c) **(Richtig)** A hat die gleichen Eigenvektoren wie B .
- (d) **(Falsch)** A hat die gleichen Eigenwerte wie B .

20. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sodass $Ax = 0$ *nur* die triviale Lösung hat. Welche Aussage ist dann sicher korrekt?

- (a) **(Falsch)** Für das Bild gilt: $\dim(\text{im } A) = 0$.
- (b) **(Falsch)** Für den Kern gilt: $\dim(\ker A) = m$.
- (c) **(Falsch)** Es gilt: $\dim(\text{im } A) + \dim(\ker A) = mn$.
- (d) **(Richtig)** Für das Bild gilt: $\dim(\text{im } A) = n$.

Die Handaufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

21. (10 Punkte) Betrachten Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq -\frac{1}{4}$ die Differentialgleichung

$$y'' = \alpha y + y'. \quad (1)$$

- (a) (2 Punkte) Überführen Sie (1) durch Substitution in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Form $z' = Az$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.
- (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte der in Teilaufgabe (a) gefundenen Matrix A .

Bemerkung: Falls Sie die Matrix A in (a) nicht bestimmen konnten, rechnen Sie mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4\alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

- (c) (3 Punkte) Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von α , die allgemeine Lösung von (1).
Bemerkung: Falls Sie die Eigenwerte in Teil (b) nicht bestimmen konnten, verwenden Sie als Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{4+16\alpha}}{2}$.
- (d) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung von (1) mit $\alpha = 2$ und der Anfangsbedingung $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

Lösung:

- (a)

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

- (b) Das charakteristische Polynom ist $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - \alpha$. Seine Nullstellen sind also $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4\alpha}}{2}$. Für die alternative Matrix erhalten wir $\lambda_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{4+16\alpha}}{2}$.
- (c) In allen Fällen (eigentliche Aufgabe und Ersatzwerte) ergibt sich

$$y(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) \text{ falls } \alpha \neq -\frac{1}{4}$$

- (d) In der eigentlichen Aufgabe ergibt sich $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$. Für die Ersatzmatrix aus (b) ergibt sich $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3$ und für die Ersatz eigenwerte aus (c) ergibt sich $\lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \pm 3$. Wir erhalten als Bedingungen

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1 + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ C_2 &= \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{aligned}$$

Es ergibt sich für die eigentliche Aufgabe: $C_1 = 0$ und $C_2 = \frac{3}{3} = 1$. Für die Matrix aus (b) ergibt sich $C_1 = \frac{1}{6}$ und $C_2 = \frac{5}{6}$. Für die Ersatz eigenwerte aus (c) ergibt sich $C_1 = \frac{7}{24}$ und $C_2 = \frac{17}{24}$.

22. (10 Punkte) Betrachten Sie die Abbildung $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$, gegeben durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$.

- a) (3 Punkte) Finden Sie die Eigenwerte von A sowie die zugehörigen Eigenvektoren. Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) (2 Punkte) Bestimmen Sie eine Basis vom Bild im A und Kern von A .
- c) (3 Punkte) Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2, -e_3, e_2 + e_3)$ von \mathbb{R}^3 . Finden Sie die Übergangsmatrix T von \mathcal{B} nach \mathcal{E} (d.h. die Matrix $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, welche Koordinaten bezüglich \mathcal{B} auf Koordinaten bezüglich \mathcal{E} abbildet) und ihre Inverse T^{-1} .
- d) (2 Punkte) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $[F]_{\mathcal{B}}$ von F bezüglich \mathcal{B} .

Lösung:

- (a) Das charakteristische Polynom von A ist $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$. Die Nullstellen sind $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\lambda_1 = 0 : \alpha \cdot (1, 0, -1)^T$$

$$\lambda_2 = 1 : \alpha \cdot (1, -1, 0)^T$$

$$\lambda_3 = 2 : \alpha \cdot (0, 1, 0)^T$$

A ist diagonalisierbar, da alle Eigenwerte algebraische Vielfachheit 1 haben (alternativ: die gefundenen Eigenvektoren sind linear unabhängig).

- (b) Eine Basis des Bilds ist $\{(1, 1, 0)^T, (0, 2, 0)^T\}$. Dies ist eine Basis, da das Bild Dimension 2 hat (da der Kern Dimension 1 hat), alle Vektoren im Bild liegen (als Spalten von A) und linear unabhängig sind. Eine Basis des Kerns ist $\{(1, 0, -1)^T\}$ (Eigenvektor zum EW 0).
- (c) Es gilt

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Spalten von T sind die Elemente von \mathcal{B} in \mathcal{E} ausgedrückt. Die Inverse ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (d) Die Darstellungsmatrix $[F]_{\mathcal{B}}$ von F bezüglich \mathcal{B} ist

$$[F]_{\mathcal{B}} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. (10 Punkte) Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ der reellen 2×2 -Matrizen sei folgendes Skalarprodukt gegeben:

$$\langle A, B \rangle := \text{spur}(A^T B) \text{ für } A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Sei $\|A\| := \sqrt{\langle A, A \rangle}$ die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm.

- (a) (2 Punkte) Verifizieren Sie, dass für jede Matrix $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt, dass $\|M\| = \|M^T\|$.

- (b) (4 Punkte) Sei $S \subset V$ der Unterraum der reellen symmetrischen 2×2 -Matrizen. Die Menge

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis von S . Berechnen Sie aus B mit Hilfe des Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis von S .

- (c) (4 Punkte) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ auf den Unterraum S .

Bemerkung: Falls Sie Teil (b) nicht lösen konnten, verwenden Sie statt S den Raum $S' \subset V$ mit der Orthonormalbasis

$$B' := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung:

- (a) Direkt, oder mit Zykel-Invarianz der Spur.

- (b)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \hat{v}_2$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Für die eigentliche Aufgabe erhalten wir:

$$\langle A, v_1 \rangle v_1 + \langle A, v_2 \rangle v_2 + \langle A, v_3 \rangle v_3 = v_1 - 3v_2 + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Für die Ersatzbasis erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left\langle A, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle A, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left\langle A, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$