

1. Gegeben seien zwei Matrizen A und B aus $\mathbb{R}^{n \times n}$, mit $n > 1$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- (a) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- ✓ (b) Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.
- (c) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.
- (d) Es gilt $\det(A) = -\det(A^\top)$.

Erklärung: Wir wissen aus der Vorlesung, dass (b) richtig ist. Für (a) sind die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ein Gegenbeispiel. (c) ist falsch. Die richtige Aussage ist $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. (d) ist auch falsch. Die Matrizen A und A^\top haben dieselbe Determinante.

2. Betrachten Sie den Vektorraum \mathcal{F} der Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Darin enthalten sind die Unterräume $\mathcal{P}_n(x)$ der Polynome mit $\text{Grad} \leq n$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- (a) Es gibt zwei linear unabhängige Polynome $p(x), q(x)$, derart dass die Polynome $xp(x)$ und $xq(x)$ linear **abhängig** sind.
- (b) Sinus und Cosinus sind linear abhängige Vektoren in \mathcal{F} .
- ✓ (c) Die Sinusfunktion ist Element von \mathcal{F} ($\sin \in \mathcal{F}$), aber liegt in keinem der Unterräume \mathcal{P}_n ($\sin \notin \mathcal{P}_n$).
- (d) Die Abbildung $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(1) + 1$ ist linear.

Erklärung: (a) Die Gleichung $\lambda xp(x) + \mu xq(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ impliziert (man dividiere durch x), dass $\lambda p(x) + \mu q(x) = 0, \forall x \neq 0$. Also hat das Polynom $\lambda p + \mu q$ unendlich viele Nullstellen und muss damit das Nullpolynom sein: $\lambda p + \mu q \equiv 0$. Nach Voraussetzung hat diese Gleichung nur die triviale Lösung $\lambda = \mu = 0$. Es folgt daraus, dass $xp(x)$ und $xq(x)$ linear unabhängig sind. Deshalb ist (a) falsch.

(b) ist falsch, denn aus $\lambda \sin + \mu \cos \equiv 0$ folgt durch Auswerten bei Null, dass $\lambda \sin(0) + \mu \cos(0) = \mu = 0$ gilt. Durch Auswerten bei $\pi/2$ finden wir genauso, dass $\lambda = 0$ ist. Damit sind die beiden Vektoren linear unabhängig.

(c) ist richtig. Es ist klar, dass $\sin \in \mathcal{F}$ ist, denn Sinus ist eine Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Allerdings ist Sinus nicht als Polynom schreibbar, da das einzige Polynom mit unendlich vielen Nullstellen das Nullpolynom ist. Deshalb gilt $\sin \notin \mathcal{P}_n$.

(d) Falsch: $\mathcal{F}(\alpha f) = [\alpha f](1) + 1 \neq \alpha f(1) + \alpha = \alpha \mathcal{F}(f)$.

Siehe nächstes Blatt!

3. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Für welche reellen Zahlen x_1 und x_2 gilt $B = A^{-1}$?

(a) $x_1 = 1, x_2 = 1.$

(b) $x_1 = 0, x_2 = -2.$

✓ (c) $x_1 = 0, x_2 = 2.$

(d) $x_1 = -1, x_2 = -1.$

Erklärung: Das Produkt $A \cdot B = C = (c_{ij})$ muss gleich der Einheitsmatrix \mathbb{I}_3 sein. Unter anderem muss also $c_{11} = 1$ sein. Dieser Eintrag ist das Produkt der ersten Zeile von A mit der ersten Spalte von B . Daraus folgt $x_1 = 0$. Genauso folgern wir, dass $c_{33} = 1$. Das Produkt der dritten Zeile von A mit der dritten Spalte von B liefert dann $x_2 = 2$. Für die Probe multipliziert man die beiden Matrizen und erhält als Produkt $A \cdot B = \mathbb{I}_3$.

4. Gegeben seien die folgenden Unterräume von \mathbb{R}^4 :

$$U := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0\}$$

$$V := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \text{ und } x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmt?

(a) $\dim(U \cap V) = 1$.

✓ (b) Für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ gilt $V = \text{Kern } A$.

(c) Für die Matrix $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $U = \text{Bild } B$.

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des Unterraums $U + V$.

Erklärung: (a) ist falsch. Der Vektorraum $U \cap V$ ist der Kern der Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das Gauss-Verfahren ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist $\text{Rang}(C) = 2$. Es folgt daraus, dass $\dim(U \cap V) = \dim(\text{Kern}(C)) = 2$ ist.

(b) ist richtig. Die Summe der Gleichungen, die V definieren ist $2x_1 + 2x_2 = 0$. Es folgt daraus, dass $x_1 + x_2 = 0$ ist. Deshalb ist $V \subset U$, und $V = U \cap V$. Die obige Rechnung zeigt, dass $V = \text{Kern } A$ ist.

(c) ist falsch. Der Unterraum U hat dimension 3, weil er durch eine lineare Gleichung definiert ist, aber $\dim(\text{Bild } B) = \text{Rang}(B) = 1$.

(d) ist falsch. Es gilt $U + V = U$. Da $\dim(U) = 3$ ist, kann die Menge in (d) keine Basis sein, weil sie aus vier Elementen besteht.

Siehe nächstes Blatt!

5. \mathcal{P}_3 sei der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 . Auf \mathcal{P}_3 sei das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

gegeben. Wählen Sie eine Orthonormalbasis für den Vektorraum $\text{span}\{1, x^3\}$.

(a) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{7}}{4}(x^3 - 1) \right\}$

✓ (b) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}}x^3 \right\}$

(c) $\{1, x^3\}$

(d) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, x^3 \right\}$

Erklärung: (a) ist falsch, denn

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\sqrt{7}}{4}(x^3 - 1) \right) dx = -\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

(c) ist falsch, denn

$$\int_{-1}^1 dx = 2 \neq 1$$

(d) ist falsch, denn

$$\int_{-1}^1 (x^3)^2 dx = \frac{2}{7} \neq 1$$

(b) hingegen ist richtig, denn

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{7}}{2} x^3 dx = 0, \quad \int_{-1}^1 \left(\sqrt{\frac{7}{2}} x^3 \right)^2 dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 dx = 1$$

Alternativ kann man die Vektoren $p_1(x) = 1, p_2(x) = x^3$ auch Gram-Schmidt unterwerfen um die Antwort zu finden. Da die Vektoren schon orthogonal sind, muss man nur normalisieren. Man berechnet $\|1\| = \sqrt{2}$ und $\|x^3\| = \sqrt{\frac{2}{7}}$.

Bitte wenden!

6. Die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & -7 & -5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte ...

- ✓ (a) $-1, 3, 5$
- (b) $-1, 0$
- (c) $-1, 4$
- (d) $-1, -7, -5$

Erklärung: Berechnen wir das charakterische Polynom der Matrix:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -7 & -5 \\ 0 & 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda)[(4 - \lambda)^2 - 1] = (-1 - \lambda)(3 - \lambda)(5 - \lambda).$$

Es folgt daraus, dass (a) richtig ist.

7. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

- (a) $(0, 1, 1)^\top$
- ✓ (b) $(-1, -1, 1)^\top$
- (c) $(1 - i, 1 + i, 2)^\top$
- (d) $(1, 0, 1)^\top$

Erklärung: Aus direkter Berechnung bekommt man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor in (b) ist deshalb ein Eigenvektor (zum Eigenwert 0).

Siehe nächstes Blatt!

8. Eine Basis des Bildes von

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 5 & 12 \\ -1 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$

✓ (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

Erklärung: Um eine Basis des Bildes zu bestimmen, müssen wir zuerst den Rang der Matrix finden. Mit dem Gauss-Verfahren bekommt man:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 5 & 12 \\ -1 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Bild hat deshalb Dimension 2. Je zwei linear unabhängige Spalten der Matrix ergeben daher eine Basis des Bildes. Daher ist (d) richtig. (a) ist sicher falsch, denn dies sind 3 Vektoren. Die Vektoren in (b) und (c) liegen nicht im Bild.

Bitte wenden!

9. Eine Basis des Kerns von

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 5 & 12 \\ -1 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

✓ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Erklärung: Es folgt aus der Lösung der vorstehenden Aufgabe, dass $\dim \text{Kern} = 2$ ist. Da der Kern ein Unterraum von \mathbb{R}^4 ist, sind deshalb nur (b) und (c) möglich. Eine direkte Berechnung bestätigt, dass die Vektoren in (b) im Kern enthalten sind.

Siehe nächstes Blatt!

10. Sei $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ der Vektorraum der reellen 2×2 -Matrizen. Welche der folgenden Teilmengen von V ist ein Untervektorraum?

(a) $U = \{A \in V \mid A \text{ ist halbeinfach}\}$

(b) $U = \{A \in V \mid A^\top = A^{-1}\}$

(c) $U = \{A \in V \mid \det(A) = 0\}$

✓ (d) $U = \{A \in V \mid \text{Spur}(A) = 0\}$

Erklärung: Nehmen wir das Beispiel $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A und B sind einfach und deshalb halbeinfach. Die Summe $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat nur den Eigenwert 1 mit algebraischer Vf 2 und geometrischer Vf 1. Deshalb ist $A + B$ nicht halbeinfach, und (a) ist falsch. (c) ist auch falsch, da $\det(A) = \det(B) = 0$, aber $\det(A + B) = 1$. (b) ist falsch, denn $0 \notin U$. (d) ist richtig, weil $\text{Spur}: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung ist.

11. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ✓ (a) Für jede $m \times n$ -Matrix A mit $n \geq m$ gibt es eine $m \times m$ -Matrix B derart, dass $\text{Bild } A = \text{Bild } B$ ist.
- (b) Die Menge der $n \times n$ -Matrizen A , welche $\dim(\text{Bild } A) = \dim(\text{Kern } A)$ erfüllen, bilden einen Vektorraum.
- (c) Sei A eine Matrix mit charakterischem Polynom $p_A(\lambda)$. Dann stimmt $\dim(\text{Bild } A)$ überein mit dem Grad von p_A .
- (d) Für jeden 2-dimensionalen Unterraum U von \mathbb{R}^3 gibt es eine Matrix A mit $\text{Bild}(A) = U = \text{Kern}(A)$.

Erklärung: (a) ist richtig. Sei $k := \text{Rang}(A)$. Dann ist $k \leq m$. Man kann für B irgendeine $m \times m$ -Untermatrix auswählen derart, dass k Spaltenvektoren von B linear unabhängig sind. (b) ist falsch. Nehmen wir das Beispiel $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Dimension des Kerns und des Bildes von beiden Matrizen sind gleich 1, aber $\dim(\text{Bild}(A + B)) = 2$ und $\dim(\text{Kern}(A + B)) = 0$. (c) ist auch falsch. Wenn A die Nullmatrix ist, dann gilt $\dim(\text{Bild } A) = 0$, aber $p_A(\lambda) = \lambda^2$ hat den Grad 2. Für (d), sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Wenn $\text{Bild}(A) = U$ ist, muss $\text{Rang}(A) = 2$ sein. Aber $\dim(\text{Rang}(A)) + \dim(\text{Kern}(A)) = 3$. Es folgt daraus, dass $\text{Kern}(A)$ 1-dimensional ist. Deshalb ist $\text{Kern}(A) \neq U$.

12. Welche Dimension hat der Lösungsraum des folgenden Differentialgleichungssystems?

$$\begin{aligned}y_1'' &= y_1 + y_2' \\ y_2'' &= y_1' \\ y_3' &= y_1' + y_2'\end{aligned}$$

(a) 2

(b) 3

✓ (c) 5

(d) 6

Erklärung: Das gegebene Differentialgleichungssystem kann durch die Substitution

$$Z := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_2 \\ y_2' \\ y_3 \end{pmatrix}$$

auf das System 1. Ordnung

$$Z' = AZ$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

zurückgeführt werden. Nach einem Satz aus der Vorlesung hat der Lösungsraum dieses System die Dimension 5. Daher hat auch der Lösungsraum des gegebenen Differentialgleichungssystems die Dimension 5.

Bitte wenden!

13. Welche der folgenden Matrizen ist weder halbeinfach noch einfach?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -8 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

✓ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Erklärung: Die Matrix in (a) ist symmetrisch und deshalb diagonalisierbar. Es folgt, dass sie halbeinfach ist. Die Matrix in (b) ist diagonal, und jeder Eigenwert hat alg. Vf 1. Deshalb ist die Matrix einfach. Für die Matrix in (c), findet man nach Berechnung, dass die Eigenwerte 2, 6 und 7 sind. Deshalb ist die Matrix auch einfach. Sei A die Matrix in (d). Dann hat A den Eigenwert 1 mit alg. Vf 2 und ist deshalb nicht einfach. Um die geom. Vf von 1 zu bestimmen, betrachten wir die Matrix

$$A - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang 2. Es folgt aus der Vorlesung, dass die geom. Vf von 1 gleich $3 - 2 = 1$ ist. Da die alg. Vf und geom. Vf verschieden sind, ist A nicht halbeinfach. Deshalb ist (d) richtig.

Siehe nächstes Blatt!

14. Sei \mathcal{P}_3 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 . Betrachte die Abbildung $\mathcal{F}: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$, $p(x) \mapsto 2p(x) - p'(x) + p''(x) - 2p(0)$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- (a) \mathcal{F} ist keine lineare Abbildung.
- ✓ (b) \mathcal{F} hat den Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1.
- (c) \mathcal{F} ist invertierbar.
- (d) \mathcal{F} hat den Eigenwert 2 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.

Erklärung: (a) ist falsch, weil Ableitung eine lineare Operation ist. Die Darstellungsmatrix von \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ ist gegeben durch:

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist nicht invertierbar, und (c) ist falsch. Man sieht sofort, dass das charakteristische Polynom $P(\lambda) = -\lambda(2 - \lambda)^3$ ist, so dass \mathcal{F} nur den Eigenwert 2 mit alg. Vf 3 hat. Um die geom. Vf zu bestimmen, müssen wir den Rang der Matrix

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

finden. Dieser Rang ist deutlich gleich 3. Es folgt daraus, dass die geom. Vf gleich 1 ist.

15. Sei A eine Matrix mit $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt...

✓ (a) $A \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$.

(b) Es gibt nicht genug Information, um $A \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu bestimmen.

(c) $\det(A) \neq 0$.

(d) $\text{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = y \right\}$.

Erklärung: Da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, können wir $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von denen schreiben:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2a + 3b = 3,$$

$$3a + 5b = 3.$$

Die einzige Lösung ist $a = 6, b = -3$. Es folgt:

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 6A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist (a) richtig und (b) falsch. Das Bild von A liegt offensichtlich in $\text{Span}\{(1, 1)^\top\}$ und hat folglich Dimension 1. Es folgt daraus, dass A nicht invertierbar ist. Somit ist die Determinante von A gleich 0, und (c) ist falsch. Die obige Berechnung zeigt, dass (d) auch falsch ist.

16. Sei $V := \mathbb{R}^n$ und sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V . Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (a) Es gibt ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V derart, dass $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ gilt für alle $v \in V$.
- (b) Falls $\|\cdot\|$ durch $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| := |x_1| + \dots + |x_n|$ definiert wird, dann wird $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt induziert.
- (c) Die Menge $U := \{v \in V \mid \|v\| = 0\}$ bildet einen Unterraum von V mit Dimension > 0 .
- ✓ (d) Sei $\|\cdot\|'$ eine andere Norm auf V . Dann konvergiert eine Folge in V gegen $v \in V$ bezüglich $\|\cdot\|$ genau dann, wenn die Folge gegen v bezüglich $\|\cdot\|'$ konvergiert.

Erklärung: Wir wissen aus der Vorlesung, dass eine Norm von einem Skalarprodukt genau dann induziert wird, wenn die Parallelogrammregel gilt. Seien $v := (1, 0)^\top$ und $w = (0, 1)^\top$. Für die Norm aus (b) mit $n = 2$ berechnen wir

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 &= \|(1, 1)^\top\|^2 + \|(1, -1)^\top\|^2 = 2^2 + 2^2 = 8, \\ 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) &= 2(1^2 + 1^2) = 4.\end{aligned}$$

Es folgt daraus, dass diese Norm die Parallelogrammregel nicht erfüllt. Deshalb sind (a) und (b) falsch. (c) ist auch falsch. Aus der Definition von einer Norm, folgt es, dass $U = \{0\}$ ist. (d) ist ein Satz aus der Vorlesung.

17. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- (a) Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in \mathbb{R}^2 ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.
- (b) In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.
- ✓ (c) $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.
- (d) Man kann beliebig viele paarweise orthogonale Vektoren in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V finden.

Erklärung: (a) ist falsch. Die Orthogonalprojektion von $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

(b) ist falsch. Für zwei Einheitsvektoren v und w ergibt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\langle v, w \rangle \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 = 1.$$

Daraus folgt $|\langle v, w \rangle| \leq 1$. Das Skalarprodukt kann also nicht beliebig gross sein.

(d) ist auch falsch. Paarweise orthogonale Vektoren sind linear unabhängig. Deshalb ist die Kardinalität einer Menge von paarweise orthogonalen Vektoren begrenzt durch die Dimension von V .

(c) ist hingegen richtig. Sei $A = (a^{(1)} \ \dots \ a^{(n)})$ eine Matrix, wobei $a^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ den j -te Spaltenvektor bezeichnet. Dann ist

$$A^T A = \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}, a^{(1)} \rangle & \dots & \langle a^{(1)}, a^{(n)} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle a^{(n)}, a^{(1)} \rangle & \dots & \langle a^{(n)}, a^{(n)} \rangle \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist genau dann orthogonal, wenn $A^T A = I$ ist. Aus der Berechnung oben folgt, dass dies zu der Aussage in der Aufgabenstellung äquivalent ist.

Siehe nächstes Blatt!

18. In \mathbb{R}^3 seien die linearen Abbildungen F_1, F_2 und F_3 wie folgt definiert:

F_1 : Spiegelung an der Ebene $x_1 = x_2$,

F_2 : Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um die x_1 -Achse,

F_3 : Drehung um $\frac{\pi}{4}$ um die x_3 -Achse.

Sei \mathcal{B} die Standardbasis von \mathbb{R}^3 , und definiere die Darstellungsmatrizen $A_i := [F_i]_{\mathcal{B}}$ für $i = 1, 2, 3$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

(a) $A_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$

✓ (b) Für alle i und alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle F_i(v), F_i(w) \rangle = \langle v, w \rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 bezeichnet.

(c) Die Darstellungsmatrix von $F_2 \circ F_1$ bezüglich \mathcal{B} ist gleich $A_1 A_2$.

(d) 1 ist **kein** Eigenwert von $A_2 A_3$.

Erklärung: (a) ist falsch. Die Matrix ist

$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ist auch falsch. Die Darstellungsmatrix ist $A_2 A_1$. Da F_1 und F_2 nicht kommutieren, ist $A_2 A_1 \neq A_1 A_2$. (d) ist falsch, weil die Verknüpfung von zwei Rotationen auch eine Rotation ist, und jede Rotation in \mathbb{R}^3 fixiert eine Linie. Irgendein von Null verschiedener Vektor auf dieser Linie ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. (b) ist richtig, denn jede F_i ist eine orthogonale Transformation. Es gilt

$$\langle F_i(v), F_i(w) \rangle = \langle A_i v, A_i w \rangle = \langle v, A_i^\top A_i w \rangle = \langle v, w \rangle,$$

da $A_i^\top A_i = \mathbb{I}$ für jedes $i = 1, 2, 3$ ist.

19. Sei V ein Vektorraum und

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$$

eine Norm auf V . Welche der folgenden Aussagen gilt nicht im Allgemeinen?

- (a) $\forall v \in V: \|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
- ✓ (b) $\forall v, w \in V: \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$.
- (c) $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R}: \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.
- (d) $\forall v, w \in V: \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Erklärung: (a), (c) und (d) sind Teil der Definition einer Norm. (b) ist die Parallelogrammregel und gilt genau dann, wenn $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt auf V induziert ist. Da nicht alle Normen diese Bedingung erfüllen, ist (b) richtig.

20. Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ definiere eine Abbildung $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, z \mapsto Az$. Dann gilt:

- ✓ (a) A hat eine Basis von Eigenvektoren.
- (b) Die geometrische Vielfachheit des grössten Eigenwertes von A ist 2.
- (c) Die Menge der Eigenwerte von A und $(A^\top)^{-1}$ sind gleich.
- (d) Die algebraische Vielfachheit des grössten Eigenwertes von A ist 2.

Erklärung: Da A eine obere Dreiecksmatrix ist, sind die Eigenwerte genau die Einträge auf der Diagonalen. Da diese Eigenwerte paarweise verschieden sind, ist A einfach. Die alg. und geom. Vf von jedem Eigenwert sind gleich 1, und (b) und (d) sind falsch. (c) ist auch falsch. Die Transponierte einer Matrix hat dieselben Eigenwerte. Weiter wissen wir, dass eine Matrix den Eigenwert $\lambda \neq 0$ genau dann hat, wenn $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von der Inverse ist. Die Eigenwerte von $(A^\top)^{-1}$ sind deshalb $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, und $\frac{1}{5}$, und (c) ist falsch. (a) ist richtig, denn A ist einfach und besitzt daher eine Eigenbasis.

Siehe nächstes Blatt!

21. [10 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ \beta & 1 & 1 - \alpha \\ -\beta & 2 - \beta & -1 + \alpha \end{pmatrix}, \text{ wobei } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- a) **[2 Punkte]** Welche Bedingungen müssen α und β erfüllen, damit die Matrix A invertierbar ist?
- b) **[6 Punkte]** Finden Sie eine Basis für das Bild von A in Abhängigkeit der Parameter α und β .
- c) **[2 Punkte]** Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist 0 ein Eigenwert von A mit geometrischer Vielfachheit 2? Bestimmen Sie für diese α und β eine Basis von Kern A .

Lösung:

a) Wir berechnen zuerst die Determinante von A . Um die Berechnung zu vereinfachen, machen wir den folgenden Gauss-Schritt, der die Determinante nicht verändert :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ \beta & 1 & 1 - \alpha \\ -\beta & 2 - \beta & -1 + \alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ \beta & 1 & 1 - \alpha \\ 0 & 3 - \beta & 0 \end{pmatrix} =: B.$$

Man bekommt $\det(A) = \alpha(3 - \beta)(\alpha - \beta - 1)$. Die Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ ist, also wenn $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 3$ und $\alpha \neq \beta + 1$.

b) Seien v_1 , v_2 und v_3 die Spaltenvektoren von A . Das heisst $A = (v_1 \ v_2 \ v_3)$. Wenn A invertierbar ist, ist das Bild von A das ganze \mathbb{R}^3 , und jede drei linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis des Bildes. Sonst müssen wir in (mindestens) einem der folgenden Fälle sein:

$(\alpha = 0)$: In diesem Fall bekommen wir

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 1 \\ 0 & 3 - \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn $\beta \neq 3$ ist, ist der Rang gleich 2. Hier gilt $v_1 = \beta v_3$, also v_1 und v_3 sind linear abhängig. Deshalb sind $\{v_1, v_2\}$ und $\{v_2, v_3\}$ Basen von $\text{Bild}(A)$. Wenn $\beta = 3$ ist, gilt $\text{Rang}(B) = \text{Rang}(A) = 1$, und jeder Spaltenvektor ist eine Basis des Bildes.

$(\beta = 3)$: Es gilt

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ 3 & 1 & 1 - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Diese hat Rang 2, ausser wenn $\alpha = 0$ ist. Das Letztere wurde im obigen Fall behandelt. Wenn $\alpha \neq 0, 4$ ist, bilden jede zwei Spaltenvektoren von A eine Basis von $\text{Bild}(A)$. Der Fall $\alpha = 4$ wird im folgenden Fall behandelt.

($\alpha = \beta + 1$): Man bringt A in Zeilenstufenform und bekommt

$$\dots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \beta + 1 & 0 & -\beta - 1 \\ \beta & 1 & -\beta \\ 0 & 3 - \beta & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \beta & 1 & -\beta \\ 0 & 3 - \beta & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist $\text{Rang}(A) = 2$. In diesem Fall ist $v_1 = -v_3$. Deshalb sind $\{v_1, v_2\}$ und $\{v_2, v_3\}$ Basen von $\text{Bild}(A)$.

(c) Wegen der Formel $\dim(\text{Kern } A) + \text{Rang}(A) = 3$ ist 0 ein Eigenwert von A mit geometrischer Vielfachheit 2 genau dann, wenn $\text{Rang}(A) = 1$ ist. Aus b) bedeutet das Letztere, dass $\alpha = 0$ und $\beta = 3$ sind. In diesem Fall gilt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\text{Kern}(A)$ durch die Gleichung $3x_1 + x_2 + x_3 = 0$ gegeben. Wir können x_2 und x_3 frei auswählen, um zwei linear unabhängige Lösungen davon zu finden. Zum Beispiel sind $(-1, 0, 3)^\top$ und $(-1, 3, 0)$ mögliche Lösungen. Deshalb gilt

$$\text{Kern}(A) = \text{Span}\{(-1, 0, 3)^\top, (-1, 3, 0)^\top\}.$$

22. [10 Punkte] Gegeben sei die quadratische Form

$$q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto q(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2.$$

a) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A , sodass $q(x) = x^\top Ax$ ist.

b) **[6 Punkte]** Ein Kegelschnitt Q ist gegeben durch

$$q(x) + a^\top x = 0, \text{ wobei } a^\top = (6, -6).$$

Bringen Sie den Kegelschnitt durch eine Hauptachsentransformation $x = Ty$ und eine Translation auf Normalform, und geben Sie dabei auch T explizit an.

c) **[2 Punkte]** Ist die quadratische Form q positiv definit, negativ definit oder indefinit? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

b) Zuerst diagonalisieren wir die Matrix A . Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von

$$\det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 1),$$

also $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert -3 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, und ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist deshalb eine orthogonale Transformationsmatrix vom Eigensystem (nennen wir dies das y -Koordinatensystem) in das ursprüngliche x -Koordinatensystem: $x = Ty$. Im y -Koordinatensystem lautet der Kegelschnitt somit

$$q(Ty) + a^\top Ty = (Ty)^\top A(Ty) + a^\top Ty = -3y_1^2 + y_2^2 + 6\sqrt{2}y_1 = 0.$$

Wir ergänzen quadratisch um den y_1 -Term zu eliminieren und bekommen

$$-3(y_1 - \sqrt{2})^2 + y_2^2 + 6 = 0.$$

was einer Translation $y + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = z$ des y -Koordinatensystems in ein z -Koordinatensystem entspricht. Schliesslich erhalten wir eine Normalform im z -Koordinatensystem

$$\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_2^2}{6} = 1.$$

c) Die quadratische Form ist indefinit, weil die Eigenwerte unterschiedliches Vorzeichen haben. Alternativ zeigen die obigen Berechnungen, dass die Normalform von q durch

$$q(y) = -3y_1^2 + y_2^2$$

gegeben ist. Im y -Koordinatensystem gilt $q((1, 0)^\top) < 0$ und $q((0, 1)^\top) > 0$. Es folgt daraus, dass q indefinit ist.

Bitte wenden!

23. [10 Punkte] Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $y' = Ay$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) **[4 Punkte]** Finden Sie die Eigenwerte von A sowie die zugehörigen Eigenvektoren von A .
- b) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie die allgemeine **reelle** Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$, und lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = (0, 0, 1)^\top$.
- c) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \rightarrow -\infty$ (Vorsicht: *minus* ∞).

Lösung:

a) Wir finden das charakterische Polynom von A durch Entwicklung der Determinante nach der zweiten Spalte der Matrix $A - \lambda \mathbb{I}$:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = (1 - \lambda)(\lambda + 1 - i)(\lambda + 1 + i).$$

Daher sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1 + i$ und $\lambda_3 = -1 - i$. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist der Kern von

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Spalte impliziert, dass $E_1 = \text{Span}\{(0, 1, 0)^\top\}$ ist. Analog berechnet man $E_{-1+i} = \text{Span}\{(i, 1 - i, 1)^\top\}$ und $E_{-1-i} = \text{Span}\{(-i, 1 + i, 1)^\top\}$.

b) Der Real- und Imaginärteil der komplexen Lösung

$$Y(t) = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 - i \\ 1 \end{pmatrix}$$

liefern je eine reelle Lösung des Systems:

$$Y_2(t) = \text{Re}(Y(t)) = e^{-t} \left[\cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$Y_3(t) = \text{Im}(Y(t)) = e^{-t} \left[\sin(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Siehe nächstes Blatt!

Dazu haben wir die reelle Lösung

$$Y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da diese Lösungen linear unabhängig sind, erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \left\{ [a \cos(t) + b \sin(t)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - [a \sin(t) - b \cos(t)] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -e^{-t}[a \sin(t) - b \cos(t)] \\ y_2(t) &= C e^t + e^{-t}[(a - b) \cos(t) + (a + b) \sin(t)] \\ y_3(t) &= e^{-t}[a \cos(t) + b \sin(t)]. \end{aligned}$$

Setzen wir $t = 0$ und die geforderten Anfangswerte ein. Die eindeutige Lösung ist $C = -1, a = 1, b = 0$.

c) Die allgemeine reelle Lösung in b) strebt gegen $(0, 0, 0)^\top$ für $t \rightarrow -\infty$ genau dann, wenn $a = b = 0$ gilt. In diesem Fall lautet die Anfangsbedingung

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ 0 \end{pmatrix}.$$