

Linearkombinationen

Definition

Seien v_1, v_2, \dots, v_n Vektoren im VR V und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

Linearkombination (LK) der Vektoren v_1, v_2, \dots, v_n .

Beispiel

Seien v_1, v_2, \dots, v_n Vektoren im VR V . Dann ist

$$U := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

ein UR von V . Dieser heißt der von v_1, v_2, \dots, v_n **aufgespannte** oder **erzeugte Unterraum** und wird mit $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bezeichnet.

Definition

Falls für einen VR V gilt, dass $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$, so heisst $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ein **Erzeugendensystem** von V . In diesem Fall heisst V **endlichdimensional**.

Beispiel

Sei $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- ▶ Dann ist $w_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine LK von v_1, v_2 , denn das LGS

$w_1 = x_1 v_1 + x_2 v_2$ hat eine Lösung: $x_1 = 2, x_2 = 1$.

- ▶ Aber $w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist keine LK von v_1, v_2 , denn das LGS $w_2 = x_1 v_1 + x_2 v_2$ hat keine Lösung.

Beispiel

$$\begin{aligned}P_4 &= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 : a_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}\{1, x, x^2, x^3, x^4\} \\ &= \text{span}\left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 4 \end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

wobei $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}$.

Beispiel

Der UR der symmetrischen 2×2 -Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

wird aufgespannt von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 4 & 14 \\ 9 & 20 & 13 & 7 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Gauss-Algorithmus findet man für den Unterraum von \mathbb{R}^4

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -17 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -43 \\ 19 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel

Der VR P aller Polynome ist unendlichdimensional, denn er besitzt kein endliches Erzeugendensystem.

Beispiel

Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^n , falls $\det(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \neq 0$.

Lemma

Seien $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ und $A = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$.

Dann sind äquivalent

- ▶ v_1, v_2, \dots, v_k sind ein Erzeugendensystem in \mathbb{R}^n .
- ▶ Jeder Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ ist LK der v_1, v_2, \dots, v_k .
- ▶ Für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ besitzt $\sum_{i=1}^k x_i v_i = b$ eine Lösung.
- ▶ Für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ besitzt das LGS $Ax = b$ eine Lösung.
- ▶ $\text{Rang } A = n$.

Folgerung: Falls $k < n$ ist, kann v_1, v_2, \dots, v_k kein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^n sein.

Definition

Sei V ein VR. Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ heissen **linear unabhängig**, falls

$$\sum_{i=1}^n x_i v_i = 0$$

nur die triviale Lösung $x_1 = \dots = x_n = 0$ hat. Andernfalls heissen die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ **linear abhängig**.

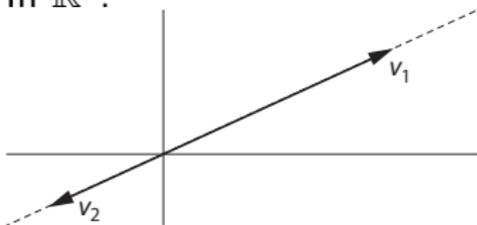
Anders gesagt: Falls der Nullvektor nur auf die triviale Art als LK der v_i dargestellt werden kann, so sind die v_i linear unabhängig. Und entsprechend: Falls der Nullvektor auf nichttriviale Art als LK der v_i dargestellt werden kann, so sind die v_i linear abhängig.

Beispiel

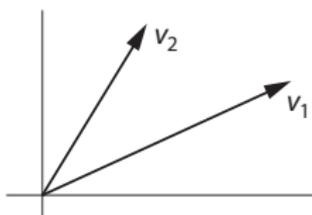
- ▶ Falls einer der Vektoren v_1, v_2, \dots, v_n der Nullvektor ist, so sind diese Vektoren linear abhängig.
- ▶ Zwei Vektoren v_1, v_2 sind linear abhängig genau dann, wenn ein Vektor ein Vielfaches des andern ist.

Geometrische Interpretation

In \mathbb{R}^2 :

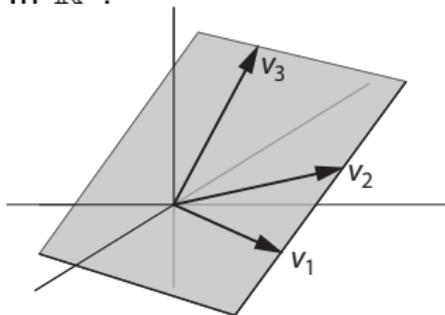


Zwei kollineare Vektoren
sind linear abhängig

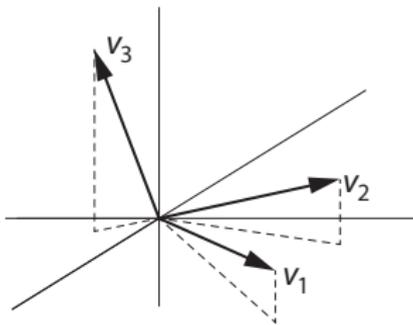


Zwei nicht kollineare Vektoren
sind linear unabhängig

In \mathbb{R}^3 :



Drei komplanare Vektoren
sind linear abhängig



Drei nicht komplanare Vek-
toren sind linear unabhängig

Beispiel

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear

unabhängig, denn $x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$ hat nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = 0$.

Beispiel

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind

linear abhängig, denn es gilt zum Beispiel $v_1 + v_2 - v_3 = 0$.