Der Gauss-Algorithmus für die erweiterte Matrix

Beschreibung des Gauss-Algorithmus

1. Bestimme die am weitesten links stehende Spalte, die von Null verschiedene Elemente enthält.
2. Ist die oberste Zahl in der in Schritt 1 gefundenen Spalte Null, so vertausche man die erste Zeile mit einer andern, wo keine Null steht (Pivot).
3. Addiere ein passendes Vielfaches der obersten Zeile zu den übrigen Zeilen, um unterhalb des Pivots Nullen zu erzeugen.
4. Wende Schritt 1 bis 3 auf die Untermatrix an, die durch Streichen der ersten Zeile entsteht, und zwar solange, bis es nicht mehr geht. Dann ist die **Zeilenstufenform** erreicht.
5. Bestimme die Lösungsmenge durch Rückwärtseinsetzen.

Zeilenstufenform

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & & x_i & & & x_j & & \dots & x_n & 1 \\
\hline
\circledast & * & \dots & & & & & & & \dots & * & c_1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \circledast & * & & & & \dots & * & c_2 \\
\vdots & & & & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & & \dots & & & & 0 & \circledast & * & \dots & * & c_r \\
\hline
0 & & \dots & & & & & 0 & & \dots & 0 & c_{r+1} \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & & \dots & & & & & 0 & & \dots & 0 & c_m
\end{array}
$$

$\circledast$ Pivots
Rot: Pivot-Variable
Blau: freie Parameter
Grün: Verträglichkeitsbedingungen $c_{r+1} = \ldots = c_m = 0$

Zeilenstufenform

$$
\begin{array}{cccccccccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & & x_i & & & & x_j & & \dots & x_n & 1 \\
\hline
\circledast & * & \dots & & & & & & & & \dots & * & c_1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \circledast & * & & & & & \dots & * & c_2 \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & & \dots & & & & & 0 & \circledast & * & \dots & * & c_r \\
0 & & \dots & & & & & & 0 & & \dots & 0 & c_{r+1} \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & & \dots & & & & & & 0 & & \dots & 0 & c_m
\end{array}
$$

Definition

Die Zahl r heisst **Rang** des LGS.

- $0 \leq r =$ Anzahl Pivotvariablen $\leq \min\{m, n\}$
- $n - r =$ Anzahl freie Parameter

Sätze

Satz 1.1

Ein LGS hat mindestens eine Lösung genau dann, wenn

- entweder $r = m$ (keine Nullzeilen)
- oder $r < m$ und $c_{r+1} = \ldots = c_m = 0$ (Verträglichkeitsbedingungen erfüllt)

In beiden Fällen liefert Rückwärtseinsetzen die Lösungsmenge.

Satz 1.2

Falls ein LGS eine Lösung besitzt, so ist diese eindeutig genau dann, wenn $r = n$ gilt.

Definition

Ein LGS $Ax = b$ heisst **homogen**, wenn $b = 0$.

Bemerkungen:

- Ein homogenes LGS (HLGS) besitzt immer die **triviale Lösung** $x = 0$.
- Falls bei einem HLGS $n > m$ gilt, so besitzt es nichttriviale Lösungen.

Korollar 1.3

Ein HLGS hat genau dann eine nicht-triviale Lösung, wenn $r < n$ gilt.

Korollar 1.4

Ein LGS $Ax = b$ ist genau dann für alle b lösbar, wenn $r = m$ gilt.

Äquivalente Formulierung:

Korollar 1.5

Ein LGS $Ax = b$ ist genau dann nicht für alle b lösbar, wenn $r < m$ gilt.

Side remark

Die logische **Kontraposition** für Aussagen A und B:

$$A \implies B \text{ ist äquivalent zu } \neg B \implies \neg A$$

Lies 'A impliziert B' ist äquivalent zu 'nicht B impliziert nicht A'.
Also auch

$$A \iff B \text{ ist äquivalent zu } \neg B \iff \neg A$$

Achtung: Aus $A \implies B$ folgt **nicht** $B \implies A$.

Zum Beispiel:

A: Federer hat im zweiten Satz den Fuss gebrochen.

B: Federer hat das Match verloren.

Spezialfall:

Anzahl Gleichungen = Anzahl Unbekannte

Korollar 1.6

Sei $m = n$. Das LGS $Ax = b$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn das LGS für beliebiges b lösbar ist.

Korollar 1.7

Sei $m = n$. Das LGS $Ax = b$ ist genau dann für beliebiges b lösbar, wenn das zugehörige homogene LGS $Ax = 0$ nur die triviale Lösung besitzt.

Geometrische Interpretation

Sei

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$$

ein Vektor in $\mathbb{R}^n$.
Eine Gleichung der Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = d \tag{$*$}$$

stellt geometrisch dar:

- eine Gerade in der Ebene, falls $n = 2$
- eine Ebene im Raum, falls $n = 3$
- eine Hyperebene, im allgemeinen

Schnittmenge

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems stellt somit die Schnittmenge der Hyperebenen im LGS dar.

Geometrische Interpretation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d \qquad (*)$$

Hessesche Normalform

Falls $\|a\| = 1$ heisst $(*)$ **Hessesche Normalform**. Dann ist a ein Einheitsnormalenvektor auf der Hyperebene, und d der orientierte Abstand der Hyperebene vom Ursprung.

Dabei ist $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$ die **Länge** (auch **Norm** genannt) des Vektors a.