

Definition

- ▶ Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Dann heißt A **invertierbar** oder **regulär** falls eine $n \times n$ -Matrix X existiert, so dass $AX = \mathbb{I}_n$. X heißt dann **Inverse** von A .
- ▶ Falls A nicht regulär ist, nennt man A **singulär**.

Bemerkungen: Sei A eine reguläre $n \times n$ -Matrix. Dann gilt:

- ▶ Die Inverse ist eindeutig bestimmt.
- ▶ Die Lösung von $Ax = b$ ist gegeben durch $x = A^{-1}b$.
- ▶ Bezeichnen wir mit $e^{(k)}$ die k -te Spalte von \mathbb{I}_n , so ist die k -te Spalte von A^{-1} die Lösung von $Ax = e^{(k)}$.

Gauss-Jordan Algorithmus zur Berechnung von A^{-1}

Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Führe das Gauss-Verfahren für die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

aus. Ist $\text{Rang } A = n$ (und somit A invertierbar), so können mit Hilfe der Zeilenoperation (III) alle Pivots auf den Wert 1 normiert, und mit der Zeilenoperation (II) über den Pivots Nullen erzeugt werden. Danach steht im Schema linkerhand die Einheitsmatrix, und rechterhand A^{-1} .

Beispiel

Wir bestimmen die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Startend
von

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

liefert das beschriebene Verfahren

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Somit $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Satz

Sind A und B invertierbare $n \times n$ -Matrizen, so gilt

1. $A^{-1}A = \mathbb{I}_n$.
2. A^{-1} ist invertierbar und $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. \mathbb{I} ist invertierbar und $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$.
4. AB ist invertierbar und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
5. A^T ist invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Satz

Für jede $n \times n$ -Matrix A sind äquivalent:

1. A ist invertierbar.
2. Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist für jedes b lösbar.
3. Das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung.

Orthogonale Matrizen

Definition

Eine $n \times n$ -Matrix heisst **orthogonal**, falls $A^T A = \mathbb{I}_n$ gilt.

Satz

Sind A und B orthogonale $n \times n$ -Matrizen, so gilt:

1. A ist invertierbar und $A^{-1} = A^T$.
2. A^{-1} ist orthogonal.
3. AB ist orthogonal.
4. \mathbb{I}_n ist orthogonal.

Beobachtung

Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Dann sind äquivalent:

1. A ist orthogonal.
2. Die Spalten von A sind Einheitsvektoren und stehen paarweise senkrecht aufeinander.
3. Die Zeilen von A sind Einheitsvektoren und stehen paarweise senkrecht aufeinander.

Eigenschaften

Orthogonale Matrizen beschreiben Isometrien

Ist A eine orthogonale $n \times n$ -Matrix, so gilt für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Ax\| = \|x\|$$

Insbesondere erhält $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$, die Abstände von Punkten, ist also eine Kongruenzabbildung:

$$\|Ax - Ay\| = \|x - y\|$$

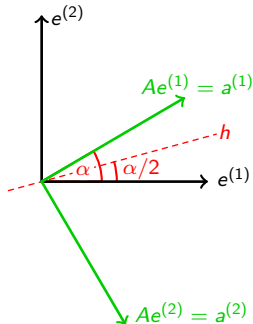
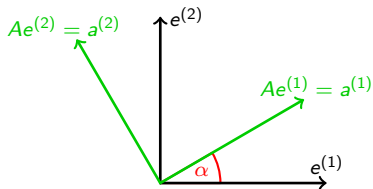
Beispiel: Drehungen und Spiegelungen in \mathbb{R}^2

Ist A eine orthogonale 2×2 -Matrix, so ist A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ Drehung um den Winkel } \alpha$$

oder

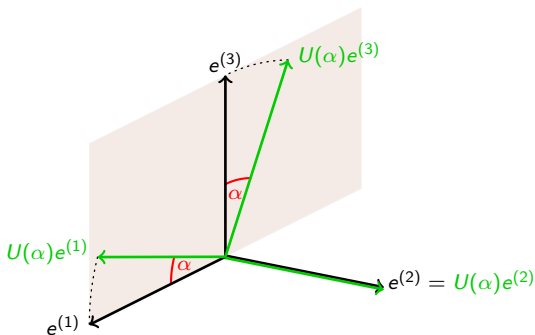
$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an Achse } h \text{ mit Winkel } \frac{\alpha}{2}$$



Givens-Rotation

$$U(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ist für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ eine orthogonale Matrix.



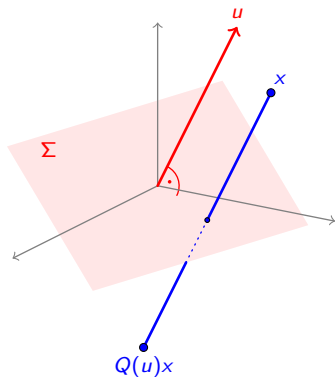
Drehung um die x_2 -Achse um den Winkel α .

Householder-Matrix

Sei u ein n -Spaltenvektor mit $u^T u = 1$. Dann ist

$$Q(u) := \mathbb{I}_n - 2uu^T$$

eine orthogonale Matrix.



Spiegelung an der Normalebene Σ zu u , denn $Q(u) = Q(u)^T$ also $Q(u)^2 = \mathbb{I}_n$ und für $x \in \Sigma$ gilt $Q(u)x = x$.