

LR-Zerlegung

Frage: Wie löst man effizient $Ax = b$ für viele verschiedene b ?

Idee: (zunächst für $n \times n$ Matrizen)

Zerlege $A = LR$ mittels Gauss-Algorithmus in ein Produkt einer Linksdreiecksmatrix L und einer Rechtsdreiecksmatrix R .

Dann ist $Ax = b$ wie folgt lösbar:

1. Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen
2. Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Denn dann gilt $Ax = LRx$

LR-Zerlegung

Frage: Wie löst man effizient $Ax = b$ für viele verschiedene b ?

Idee: (zunächst für $n \times n$ Matrizen)

Zerlege $A = LR$ mittels Gauss-Algorithmus in ein Produkt einer Linksdreiecksmatrix L und einer Rechtsdreiecksmatrix R .

Dann ist $Ax = b$ wie folgt lösbar:

1. Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen
2. Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Denn dann gilt $Ax = LRx = Ly$.

LR-Zerlegung

Frage: Wie löst man effizient $Ax = b$ für viele verschiedene b ?

Idee: (zunächst für $n \times n$ Matrizen)

Zerlege $A = LR$ mittels Gauss-Algorithmus in ein Produkt einer Linksdreiecksmatrix L und einer Rechtsdreiecksmatrix R .

Dann ist $Ax = b$ wie folgt lösbar:

1. Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen
2. Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Denn dann gilt $Ax = LRx = Ly = b$.

LR-Zerlegung

Beispiel

Erster Eliminationsschritt:

$$\begin{array}{ccc}
 A = A_0 & & A_1 \\
 \begin{array}{ccc}
 2 & -1 & -3 \\
 6 & 1 & -10 \\
 -2 & -7 & 8
 \end{array} & \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \cdot(+1) \end{array} & \begin{array}{ccc}
 2 & -1 & -3 \\
 0 & 4 & -1 \\
 0 & -8 & 5
 \end{array} \begin{array}{l} \cdot(+3) \\ \cdot(-1) \end{array}
 \end{array}$$

Wegen des Zeilenstruktursatzes gilt

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_0 \quad \text{und} \quad A_0 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: L_1} A_1$$

Zweiter Eliminationsschritt:

$$\begin{array}{ccc}
 A_1 & & A_2 \\
 \begin{array}{ccc}
 2 & -1 & -3 \\
 0 & 4 & -1 \\
 0 & -8 & 5
 \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{green}} \\ \xleftarrow{\text{red}} \end{array} & \begin{array}{ccc}
 2 & -1 & -3 \\
 0 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 3
 \end{array}
 \end{array}$$

The diagram shows the transformation from matrix A_1 to A_2 . In A_1 , the second row is multiplied by $+2$ (indicated by a green arrow and $\cdot(+2)$), and the result is added to the third row (indicated by a green arrow from the second row to the third row and a red arrow from the third row to the second row). In A_2 , the second row is multiplied by -2 (indicated by a red arrow and $\cdot(-2)$), and the result is subtracted from the third row (indicated by a red arrow from the second row to the third row and a green arrow from the third row to the second row).

Wiederum

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & +2 & 1 \end{pmatrix} A_1 \quad \text{und} \quad A_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{=: L_2} A_2$$

Zusammen also

$$A = A_0 = L_1 A_1 = L_1 L_2 A_2$$

so dass mit $L := L_1 L_2$ und $R := A_2$ die gewünschte Zerlegung $A = LR$ gefunden ist:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Eine Matrix mit lauter 1 auf der Diagonalen und nur unterhalb einer solchen 1 in einer Spalte von 0 verschiedenen Koeffizienten, heisst **Frobenius-Matrix**. Diese Matrizen haben ein besonders einfaches Inverses. Z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Die Faktoren L_i beim Herstellen der LR-Zerlegung sind gerade Frobenius-Matrizen. Mit ihnen lassen sich die einzelnen Eliminationsschritte (Nullen unter einem Pivot erzeugen mit Zeilenoperationen II) darstellen: $A_{i-1} = L_i A_i$.

Ihr Produkt ist

$$L = L_1 L_2 \dots L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 1. Spalte von L_1 2. Spalte von L_2 3. Spalte von $L_3 \dots$

(Dies ergibt sich aus dem Spaltenstruktursatz.)

Satz 2.10

Sei A eine $m \times n$ -Matrix. Die Durchführung des Gaußalgorithmus sei möglich ohne Vertauschen von Zeilen.

Dann liefert das Gaußverfahren, angewandt auf A :

- ▶ eine invertierbare $m \times m$ -Linksdreiecksmatrix $L = (\ell_{kj})$ mit Einsen auf der Diagonale und
- ▶ eine $m \times n$ -Matrix R in Zeilenstufenform (Endschema) so dass gilt

$$LR = A$$

Beim Gaußverfahren wird das ℓ_{kj} -fache der Zeile j von Zeile k subtrahiert, um in Zeile k unter dem j -ten Pivot eine Null zu erzeugen.

Kompakte Schreibweise

Um Speicherplatz/Schreibarbeit zu sparen, werden bei der LR-Zerlegung beide Matrizen, also die Linksdreiecksmatrix L und die Zeilenstufenformmatrix R in einer einzigen Matrix abgespeichert: Statt

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ 0 & 0 & r_{33} & \dots & r_{3m} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{nm} \end{pmatrix}$$

speichert/schreibt man lediglich

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ l_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ l_{31} & l_{32} & r_{33} & \dots & r_{3m} \\ \dots & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & & r_{nm} \end{pmatrix}$$

Ersparnis:

Die Nullen in L und R und die Einsen auf der Diagonale von L werden nicht mitgespeichert.

Bemerkung

- ▶ Falls $m = n$, so ist R eine Rechtsdreiecksmatrix.
- ▶ $A = LR$ ist invertierbar $\iff R$ ist invertierbar.

Anwendung

Sei A eine $m \times n$ -Matrix. Der Gaußalgorithmus für A sei ohne Zeilenvertauschung möglich. Dann kann man $Ax = b$ wie folgt lösen:

1. Bestimme die LR-Zerlegung $A = LR$.
2. Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen.
3. Bestimme die Lösungsmenge von $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen.

Definition

Eine $n \times n$ -Matrix P heisst **Permutationsmatrix**, falls sie aus \mathbb{I}_n durch Vertauschung von Zeilen hervorgegangen ist.

Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{[3]} \\ e^{[1]} \\ e^{[2]} \end{pmatrix}$$

Bemerkung

- ▶ Jede Permutationsmatrix ist orthogonal.
- ▶ In jeder Zeile und in jeder Spalte steht genau eine 1.
- ▶ In PA erscheinen die Zeilen von A so vertauscht, wie es die Zeilen von P sind.