Definition

Eine $n \times n$-Matrix P heisst **Permutationsmatrix**, falls sie aus $\mathbb{I}_n$ durch Vertauschung von Zeilen hervorgegangen ist.

Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{[3]} \\ e^{[1]} \\ e^{[2]} \end{pmatrix}$$

Bemerkung

- Jede Permutationsmatrix ist orthogonal.
- In jeder Zeile und in jeder Spalte steht genau eine 1.
- In PA erscheinen die Zeilen von A so vertauscht, wie es die Zeilen von P sind.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} e^{[3]} \\ e^{[1]} \\ e^{[2]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ a^{[3]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{[3]} \\ a^{[1]} \\ a^{[2]} \end{pmatrix}$$

Anwendung: Falls beim Gaussalgorithmus angewandt auf A Zeilenvertauschungen nötig sind, wählt man eine Permutationsmatrix P so, dass für PA keine Zeilenvertauschungen nötig sind. Dann liefert das bisher beschriebene Verfahren die LR-Zerlegung $PA = LR$.

Beispiel:

Finde $PA = LR$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Linkerhand führen wir Buch über die Zeilenvertauschungen, rechterhand erfolgt die LR-Zerlegung:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}$$

Wir vertauschen die erste und die dritte Zeile, um das Pivotelement 2 in Position zu bringen:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}$$

Nun wird **nur rechterhand** das $\boxed{2}$-fache der Zeile 1 von Zeile 2 subtrahiert, d.h. $\ell_{21} = \boxed{2}$.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}$$

Beachte hier die erwähnte platzsparende Schreibweise: Wir haben den Faktor $\boxed{2}$ an die Stelle gesetzt, wo wir die Null erzeugt haben!

Wir vertauschen die zweite und die dritte Zeile, um das Pivotelement 3 in Position zu bringen:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{2} & 0 & -1 \end{array}$$

Wir lesen für $PA = LR$ ab:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Satz

Sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann liefert das erweiterte Gaussverfahren, angewandt auf A, eine invertierbare $m \times m$-Linksdreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonale, eine $m \times n$-Matrix in Zeilenstufenform R und eine $m \times m$-Permutationsmatrix P, so dass $PA = LR$ gilt. P erhält man aus $\mathbb{I}_m$ durch die Zeilenvertauschungen, die bei A nötig waren.

Anwendung

Sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann kann man $Ax = b$ wie folgt lösen:

1. Bestimme die LR-Zerlegung $PA = LR$.
2. Löse $Ly = Pb$ durch Vorwärtseinsetzen.
3. Bestimme die Lösungsmenge von $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen.

Determinanten

Die Determinante ordnet jeder $n \times n$-Matrix A eine Zahl zu.

Notation: $\det A$ oder $|A|$.

Definition

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann schreiben wir A_{ij} für die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die man aus A durch Streichen der Zeile i und Spalte j bekommt:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Rekursive Definition der Determinate

- $n = 1$: Für $A = (a)$ ist $\det A := a$.
- $n > 1$: Man setzt

$$\det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Beispiel

- $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
- $n = 3$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

Rekursive Definition der Determinate

- $n = 1$: Für $A = (a)$ ist $\det A := a$.
- $n > 1$: Man setzt

$$\det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Beispiel

- $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
- $n = 3$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

Rekursive Definition der Determinate

- $n = 1$: Für $A = (a)$ ist $\det A := a$.
- $n > 1$: Man setzt

$$\det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Beispiel

- $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
- $n = 3$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

Rekursive Definition der Determinate

- $n = 1$: Für $A = (a)$ ist $\det A := a$.
- $n > 1$: Man setzt

$$\det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Beispiel

- $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
- $n = 3$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$

Rekursive Definition der Determinate

- $n = 1$: Für $A = (a)$ ist $\det A := a$.
- $n > 1$: Man setzt

$$\det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Beispiel

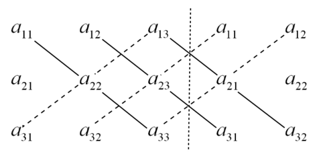
- $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
- $n = 3$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 2$$

Bemerkungen

- $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$

  D.h. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ist der orientierte Fächeninhalt des von $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.
- **Regel von Sarrus** (nur für 3×3-Matrizen!!!)



  $\det A =$ *Summe der Produkte in Hauptdiagonalrichtung minus Summe der Produkte in Nebendiagonalrichtung.*

Definition

- Die Zahlen $M_{ij} := \det A_{ij}$ heissen **Minoren** von A.
- Die Zahlen $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ heisst **Kofaktoren** von A.
- Die Matrix $(\tilde{a}_{ij})^T$ heisst **Adjunkte** von A.

Satz

i. Vertauscht man zwei Zeilen von A, so wechselt die Determinante das Vorzeichen.

ii. Addiert man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen (Zeilenoperation II) so ändert sich die Determinate nicht.

Die Determinante ist als Funktion jeder Zeile linear, d.h.

iii. $\det \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ \vdots \\ \alpha a^{[i]} \\ \vdots \\ a^{[n]} \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ \vdots \\ a^{[i]} \\ \vdots \\ a^{[n]} \end{pmatrix}$ und

Satz (Fortsetzung)

iv. $$\det\begin{pmatrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ \vdots \\ a^{[i]} + b^{[i]} \\ \vdots \\ a^{[n]} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ \vdots \\ a^{[i]} \\ \vdots \\ a^{[n]} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ \vdots \\ b^{[i]} \\ \vdots \\ a^{[n]} \end{pmatrix}$$

Beispiele

i. $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

ii. $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + 2a & d + 2b \end{vmatrix}$$

Beispiele

iii. $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

iv. $\begin{vmatrix} a & b \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$

Folgerungen

1. Hat eine Matrix A zwei gleiche Zeilen, so gilt $\det A = 0$.
2. Hat A eine Nullzeile, so gilt $\det A = 0$.
3. Ist A eine $n \times n$-Matrix, so gilt $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.