4.1. Zwischenwertsatz 1

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nehmen an, es gelte: $f(0) = f(1)$. Beweisen Sie, dass es ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ gibt mit:

$$f\Big(c + \tfrac{1}{2}\Big) = f(c)$$

Hinweis: *Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion* $g : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ *an, mit* $g(x) := f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$.

Lösung. Wir definieren die Funktion $g : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$g(x) := f\Big(x + \tfrac{1}{2}\Big) - f(x), \quad \forall x \in [0, \tfrac{1}{2}]$$

Wir werden zeigen, dass ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert mit $g(c) = f(c + \frac{1}{2}) - f(c) = 0$, denn dann gilt $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$ für dieses c. Dazu betrachten wir die Randwerte 0 und $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} g(0) &= f\Big(\tfrac{1}{2}\Big) - f(0), \\ g\Big(\tfrac{1}{2}\Big) &= f(1) - f\Big(\tfrac{1}{2}\Big) = f(0) - f\Big(\tfrac{1}{2}\Big) = -\Big(f\Big(\tfrac{1}{2}\Big) - f(0)\Big) = -g(0), \end{aligned}$$

wobei wir $f(0) = f(1)$ verwendet haben. Falls $g(0) = 0$, dann können wir $c = 0$ nehmen. Falls $g(0) \neq 0$, dann haben $g(0)$ und $g(\frac{1}{2}) = -g(0)$ entgegengesetzte Vorzeichen. Also gilt $0 \in [g(0), g(\frac{1}{2})]$ (für $g(0) < 0$), respektive $0 \in [g(\frac{1}{2}), g(0)]$ für $g(0) > 0$. Gemäss dem Zwischenwertsatz muss also die stetige Funktion g den Wert 0 an einer Stelle $c \in [0, \frac{1}{2}]$ annehmen. Somit ist der Beweis abgeschlossen.

4.2. Zwischenwertsatz 2

Es sei

$$f : [-2, -1] \cup [1, 2] \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Nehmen Sie an, dass $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$. Kann man schliessen, dass ein $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$ existiert, sodass $f(x) = 0$? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung. Nein. Als Gegenbeispiel betrachte man die Funktion

$$f : [-2, -1] \cup [1, 2] \to \infty, \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x \in [-2, -1] \\ 1 & \text{falls } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Dann ist f stetig, $f(-2) = -1$ und $f(2) = 1$, aber f nimmt den Wert 0 nicht an.

4.3. Gleichmässige Stetigkeit

Sind die folgenden Funktionen gleichmässig stetig?

(a) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(c) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \log(x)$

(d) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$

(e) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Lösung.

(a) f ist gleichmässig stetig: sei $\varepsilon > 0$, sei $\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für alle $x, y \in (0, 1)$ mit $|x - y| < \delta_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| = |x^2 - xy + xy - y^2| = |x(x - y) + y(x - y)| \\ &\leq |x(x - y)| + |y(x - y)| = (|x| + |y|)|x - y| \\ &\leq 2|x - y| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $|x|, |y| \leq 1$.

(b) f ist nicht gleichmässig stetig: wir zeigen, dass für $\varepsilon = 1$ kein $\delta > 0$ existiert, welches die Definition von gleichmässiger Stetifkeit erfüllt, also

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |y - x| < \delta \quad \implies \quad |f(y) - f(x)|.$$

Nehmen wir zum Widerspruch an, dass ein solches $\delta > 0$ existiert. Setzen wir $y = x + \frac{\delta}{2}$, dann gilt insbesondere:

$$\left| f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - f(x) \right| \leq 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Aber

$$\left| f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - f(x) \right| = \left| \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2 \right| = \left| x\delta + \frac{\delta^2}{4} \right|.$$

Für $x > \frac{1}{\delta}$ gilt also

$$\left| f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - f(x) \right| > 1,$$

was den gewünschten Widerspruch zu (1) liefert.

(c) f ist gleichmässig stetig. Sei $x, y \in [1, \infty)$. Dann gilt

$$|\log(x) - \log(y)| = \Big|\log\Big(\frac{x}{y}\Big)\Big| = \Big|\log\Big(1 + \frac{x-y}{y}\Big)\Big|,$$

wobei wir das Additionstheorem für den Logarithmus verwendet haben. Da $y \geq 1$, gilt $\left|\frac{x-y}{y}\right| \leq |x-y|$. Sei nun $\epsilon > 0$ Da der Logarithmus im Punkt 1 stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$|\log(1+h) - \log(1)| = |\log(1+h)| < \epsilon,$$

für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \delta$. Nehmen wir nun $|x-y| < \delta$, dann gilt $\left|\frac{x-y}{y}\right| < \delta$, und somit

$$|\log(x) - \log(y)| = \Big|\log\Big(1 + \frac{x-y}{y}\Big)\Big| < \epsilon.$$

Somit ist log gleichmässig stetig auf $[1, \infty)$.

(d) f ist gleichmässig stetig. Sei $x, y \in [0, \infty)$. Falls $x \geq y$, gilt auch $\sqrt{x}\sqrt{y} \geq y$, und somit

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leq x - 2y + y = x - y = |x-y|.$$

Umgekehrt, falls $y \geq x$, gilt $\sqrt{x}\sqrt{y} \geq x$, und somit

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leq x - 2x + y = y - x = |x-y|.$$

Durch ziehen der Wurzel, erhalten wir in beiden Fällen $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$. Sei nun $\epsilon > 0$. Wir wählen $\delta := \epsilon^2$. Dann gilt für alle $x, y \in [0, \infty)$ mit $|x-y| < \delta$:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|} < \sqrt{\delta} = \epsilon.$$

Somit ist die Funktion $\sqrt{x}$ gleichmässig stetig auf $[0, \infty)$.

(e) f ist gleichmässig stetig. Tatsächlich kann die Funktion f zu einer stetigen Funktion $\overline{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ erweitert werden, nämlich

$$\overline{f} : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \in (0,1]. \end{cases}$$

Es ist klar, dass $\overline{f} = f$ auf $(0,1)$ und dass $\overline{f}$ als Komposition und Produkt stetiger Funktionen auf $(0,1]$ stetig ist. Wir überprüfen, dass $\overline{f}$ auch an der Stelle 0 stetig ist: sei $\varepsilon > 0$ und sei $\delta := \varepsilon$. Sei $x \in (0,1]$ mit $|x - 0| < \delta$. Dann gilt

$$|\overline{f}(x) - \overline{f}(0)| = |x \sin(\tfrac{1}{x})| \leq x < \varepsilon.$$

Wir schliessen, dass $\overline{f}$ stetig auf $[0,1]$ ist. Da $[0,1]$ kompakt ist, ist $\overline{f}$ gleichmässig stetig (siehe Satz 4.7.3 im Skript). Deswegen ist auch f gleichmässig stetig.