5.1. Rechenregeln für Ableitungen

Argumentieren Sie, warum die folgenden Funktionen differenzierbar sind, und bestimmen Sie ihre Ableitungen:

(a) $\log(\sin(x))$ für $x \in (0, \pi)$,

(b) a^x für $x \in \mathbb{R}$ und ein $a \in (0, \infty)$,

(c) x^x für $x \in (0, \infty)$,

(d) $9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(e) $\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}$ für $x \in (4, \infty)$,

Lösung.

Differenzierbarkeit lässt sich in jedem Fall mittels der Kettenregel sowie Produkt-/Quotienten- und Summenregel angewandt auf einfache Funktionen wie Polynome, Exponentialfunktion, Logarithmus, etc. bestimmen. Man beachte, dass zu prüfen ist, ob der Nenner bei Quotienten verschwindet, da dies sonst eine Stelle ist, an der Differenzierbarkeit nicht gegeben ist. Zudem muss man sich überzeugen, dass in log keine Zahlen ≤ 0 eingesetzt werden.

(a) Der Ausdruck $\log(\sin x)$ ist für $x \in (0, \pi)$ wohldefiniert, da dann $\sin(x) > 0$ gilt. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$\frac{d}{dx}(\log(\sin(x))) = \frac{1}{\sin(x)} \sin'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(b) Wir schreiben $a^x = e^{x \log(a)}$ und erhalten

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \log(a) e^{x \log(a)} = \log(a) a^x.$$

(c) Es gilt $x^x = e^{x \log x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir

$$\frac{d}{dx}(x^x) = \left[\frac{d}{dx}(x \log x)\right] e^{x \log x} = \left(\frac{x}{x} + \log x\right) e^{x \log x} = (1 + \log x) x^x.$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}) &= 7 \cdot 9x^6 + (-5)3x^{-6} - (-11)3x^{-12} \\ &= 63x^6 - 15x^{-6} + 33x^{-12}. \end{aligned}$$

(e) Wir verwenden zuerst die Kettenregel und dann die Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}} &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}}\cdot\frac{(2x-3)(x^2-7x+12)-(x^2-3x+2)(2x-7)}{(x^2-7x+12)^2}\\
&= \frac{(x^2-7x+12)^{\frac{1}{2}}}{2(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(-4x^2+20x-22)}{(x^2-7x+12)^2}\\
&= \frac{-2x^2+10x-11}{(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}(x^2-7x+12)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

5.2. Potenzen der Betragsfunktion

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$. Betrachten Sie die Funktion

$$f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|^{\alpha+1}\,.$$

Bestimmen Sie, für welche α die Ableitung von f_α an der Stelle 0 existiert.

Lösung.

Die Funktion ist an der Stelle 0 differenzierbar, falls der Grenzwert $\lim_{h\to 0}\frac{f_\alpha(h)-f_\alpha(0)}{h}$ existiert. Wir berechnen:

$$\frac{f_\alpha(h)-f_\alpha(0)}{h} = \frac{|h|^{\alpha+1}-0}{h} = |h|^\alpha\frac{|h|}{h}\,,$$

das heisst

$$\frac{f_\alpha(h)-f_\alpha(0)}{h} = |h|^\alpha \operatorname{sign} h\,.$$

Für die einseitigen Grenzwerte, gilt also

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f_\alpha(h)-f_\alpha(0)}{h} = \lim_{h\to 0}|h|^\alpha, \qquad \lim_{h\to 0-}\frac{f_\alpha(h)-f_\alpha(0)}{h} = -\lim_{h\to 0}|h|^\alpha.$$

Damit die einseitigen Grenzwerte übereinstimmen, muss gelten $\lim_{h\to 0}|h|^\alpha = 0$. Dies gilt genau dann, wenn $\alpha > 0$ ist. In diesem Fall bekommen wir

$$f_\alpha'(0) = \lim_{h\to 0}|h|^\alpha \operatorname{sign} h = 0\,.$$

5.3. Abschätzungen aus Ableitungen

Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige und differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$, sowie $f'(x) \geq g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$.

(a) Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$f(x) \geq g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Falls sogar $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$, so zeigen Sie ferner:

$$f(x) > g(x), \quad \forall x \in (a, b].$$

Hinweis: *Benutzen Sie den Mittelwertsatz.*

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$1 - \frac{1}{x} < \log(x) < x - 1, \quad \forall x > 1.$$

Lösung.

(a) Wir definieren $h(x) := f(x) - g(x)$ und bemerken, dass $h(a) \geq 0$ sowie:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

Sei nun $x \in (a, b]$ beliebig. Eine Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Funktion h ergibt ein $y \in (a, x)$, so dass

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(y),$$

oder anders geschrieben:

$$h(x) = h(a) + h'(y)(x - a).$$

Da sowohl $h(a) \geq 0$ wie auch $h'(y) \geq 0$, sehen wir, dass auch $h(x) \geq 0$. Also gilt für alle $x \in [a, b]$:

$$f(x) - g(x) = h(x) \geq 0 \implies f(x) \geq g(x)$$

Unter der stärkeren Annahmen an die Ableitungen, also $f'(x) > g'(x)$, gilt

$$h'(x) > 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Eingesetzt in die Gleichung oben, finden wir für alle $x \in (a, b]$:

$$f(x) - g(x) = h(x) > 0 \implies f(x) > g(x).$$

(b) Wir sehen:

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}, \quad \log'(x) = \frac{1}{x}, \quad (x-1)' = 1$$

Ist nun $x > 1$, so gilt

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} < 1.$$

Ausserdem finden wir

$$1 - \frac{1}{1} = \log(1) = 1 - 1 = 0.$$

Wir können also die erste Teilaufgabe anwenden, um die gewünschten Ungleichungen zu folgern.