5.1. Häufungspunkte Explizit Bestimmen

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folgen reeller Zahlen:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := (-1)^n$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{(1+(-1)^n)n^3}{n^2-n+1}$

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$

Hinweis: *Ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Zahl, welche der Grenzwert einer Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.*

5.2. Unendlich viele Häufungspunkte

In dieser Aufgabe konstruieren wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Menge von Häufungspunkten das ganze Intervall $[0, 1]$ ist. Wir konstruieren die Folge so, dass die Folgeglieder gerade die dyadischen Zahlen zwischen 0 und 1 sind; das sind Zahlen der Form $\frac{j}{2^k}$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ und ein $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$.

Genauer: wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad 2^k \leq n < 2^{k+1} \qquad \text{sei} \quad a_n := \frac{n - 2^k}{2^k}.$$

Als Beispiel, die ersten paar Folgeglieder sind also:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 0, \\
&a_2 = 0,\ a_3 = \frac{1}{2}, \\
&a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{4},\ a_6 = \frac{1}{2},\ a_7 = \frac{3}{4}, \\
&a_8 = 0,\ a_9 = \frac{1}{8},\ a_{10} = \frac{1}{4},\ a_{11} = \frac{3}{8},\ a_{12} = \frac{1}{2},\ a_{13} = \frac{5}{8},\ a_{14} = \frac{3}{4},\ a_{15} = \frac{7}{8},\ \ldots
\end{aligned}$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass die Menge der Häufungspunkte dieser Folge gerade das Intervall $[0, 1]$ ist.

(a) Sei $r \in [0, 1]$. Zeigen Sie: $\forall k \in \mathbb{N}_0,\ \exists n \in \{2^k, 2^k + 1, ..., 2^{k+1} - 1\}$, sodass

$$\left| \frac{n - 2^k}{2^k} - r \right| \leq \frac{1}{2^k}. \tag{1}$$

(b) Sei r wie in (a), $\forall k \in \mathbb{N}_0$ sei $b_k^r = \frac{n_k - 2^k}{2^k}$, wo n_k das kleinste Element in $\{2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1\}$ ist, welches Bedingung (1) erfüllt.
Zeigen Sie: $\lim_{k\to\infty} b_k^r = r$.

(c) Sei $s \in [0,1]^c$ (zur Erinnerung: $[0,1]^c = \{r \in \mathbb{R}; r \notin [0,1]\}$). Zeigen Sie, dass s kein Haüfungpunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

(d) Schliessen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte dieser Folge gerade das Intervall $[0,1]$ ist.

5.3. Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *Nullfolge*, falls $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

erfüllt.

5.4. Supremum und Konvergenz

Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Teilmenge. Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup A$.

5.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wenn die Folge (a_n) konvergiert, dann hat (a_n) mindestens einen Häufungspunkt.

- **(i)** Wahr
- **(ii)** Falsch

(b) Wenn die Folge (a_n) divergiert, dann hat (a_n) mindestens einen Häufungspunkt.

- **(i)** Wahr
- **(ii)** Falsch

(c) Eine Folge (a_n) mit genau einem Häufungspunkt ist konvergent.

- **(i)** Wahr
- **(ii)** Falsch

(d) Eine beschränkte Folge (a_n), welche nicht konvergiert, hat mindestens zwei Häufungspunkte.

- **(i)** Wahr
- **(ii)** Falsch

(e) Eine beschränkte Folge mit genau einem Häufungspunkt ist konvergent.

- **(i)** Wahr
- **(ii)** Falsch