11.1. Potenzreihen und Ableitungen

Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Identität zu beweisen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion:

$$\frac{1}{1-x} \quad \text{für} \quad x \in (-1,1)$$

(b) Berechnen Sie nun die Ableitung derselben Funktion mittels der geometrischen Reihendarstellung:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{auf} \quad (-1,1)$$

Hinweis: *Benutzen Sie Satz 5.4.2.*

(c) Folgern Sie die Identität aus der Aufgabenstellung durch Kombinieren der vorherigen Berechnungen.

11.2. Höhere Ableitungen und Taylor Reihen

(a) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitungen bis und mit 4-ter Ordnung

a) $f(x) := \cos(x)e^{\sin(x)}$

b) $f(x) := \log(1 + x^2)$

c) $f(x) := e^x \cos(x) - x \sin(x)$

(b) Bestimmen Sie für jede der obigen Funktionen das Taylorpolynom zur Ordnung 4 um $x = 0$.

11.3. Taylor Approximation.

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cos(x)$$

Wir wollen f durch Taylor-Polynome $T_m f(x; a)$ in $a = 0$ approximieren. Hier ist m die Ordnung des Polynoms.

Wir wissen, dass (bis auf die ersten 12 Dezimalstellen) $\cos(0.2) = 0.980066577841$ ist. Was ist die kleinste Ordnung m, damit der Näherungsfehler an der Stelle $x = 0.2$ höchstens 10^{-10} ist?

Was ist in diesem Fall der Näherungsfehler an der Stelle $x = 1$?

Hinweis: *Mit Näherungsfehler an der Stelle x wird $|f(x) - T_m f(x; a)|$ gemeint.*

11.4. Grenzwerte und Taylorpolynome

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mithilfe einer Taylorapproximation:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1+2x^2}{x\sin(x)^3}$

(c) $\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x}}$

11.5. Extremalstellen

Bestimmen Sie die globalen Extremalstellen der folgenden Funktionen:

(a) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^3 - x^2 - 8x + 1,$

(b) $f : [-1, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x+1}{x^2+1},$

(c) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto (x - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$

Hinweis: *Man erinnere sich, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall stets sein Maximum und Minimum annimmt; entweder im Inneren oder an den Randpunkten des Intervalls.*

11.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 3 der Funktion f im Punkt 0?

$$f(x) := xe^x$$

(i) $x + x^2 + x^3$

(ii) $1 + x + x^2 + x^3$

(iii) $x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$

(iv) $1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$

(b) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion f im Punkt 1?

$$f(x) := x\log(x)$$

(i) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4$

(ii) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4$

(iii) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4$

(iv) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{3}(x-1)^4$

(c) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion f im Punkt 1?

$$f(x) := x\log(x)^4$$

(i) 0

(ii) $(x-1)^2$

(iii) $(x-1)^3$

(iv) $(x-1)^4$