4.1. Wurzel in $\mathbb{C}$

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass jede komplexe Zahl eine komplexe Wurzel besitzt, ohne dabei die Polarform zu verwenden.

Es seien also $z = a + bi, w = c + di$ komplexe Zahlen mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie, dass:
$$z^2 = w,$$
äquivalent ist zu folgenden Gleichungen:
$$a^2 - b^2 = c, \quad 2ab = d.$$

(b) Zeigen Sie, dass wenn $z^2 = w$, dann gilt $|w| = a^2 + b^2$.

(c) Wenn $z^2 = w$, beweisen Sie, dass a und b die folgenden Gleichungen erfüllen:
$$a^2 = \frac{1}{2}(|w| + c), \quad b^2 = \frac{1}{2}(|w| - c). \tag{1}$$

(d) Beweisen Sie, dass reelle Zahlen a, b existieren, sodass (1) erfüllt ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich, dass jede nicht-negative Zahl eine Wurzel hat.

(e) Wenn a, b die Gleichungen (1) erfüllen, zeigen Sie, dass auch $a^2 - b^2 = c$ sowie $(2ab)^2 = d^2$ gelten.

(f) Folgern Sie, durch geschickte Wahl der Vorzeichen von a, b, dass zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl z existiert, sodass $z^2 = w$.

Lösung.

(a) Es gilt:
$$z^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = c + di = w$$
Betrachten wir den Real- und Imaginärteil individuell, so sehen wir:
$$c = a^2 - b^2, \quad d = 2ab$$

(b) Es gilt:
$$\begin{aligned} |w| &= \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} \\ &= \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2} \\ &= \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2 \end{aligned}$$
Alternativ folgt dies aus $|w| = |z^2| = |z|^2 = a^2 + b^2$.

(c) Wir haben das Gleichungssystem:

$$a^2 + b^2 = |w|$$
$$a^2 - b^2 = c$$

Addieren wir die beiden Gleichungen, so finden wir:

$$2a^2 = |w| + c \quad \Longrightarrow \quad a^2 = \frac{1}{2}(|w| + c)$$

Analog, subtrahieren wir die zweite von der ersten Gleichung, so sehen wir:

$$2b^2 = |w| - c \quad \Longrightarrow \quad b^2 = \frac{1}{2}(|w| - c)$$

(d) Es reicht zu zeigen, dass $|c| \leq |w|$. Der Grund hierfür ist, dass dann $|w| \pm c \geq 0$ und somit eine reelle Wurzel (bzw. sogar zwei) existiert. Betrachten wir nun $|w|$, so sehen wir aufgrund der Monotonie der Wurzel:

$$|w| = \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{c^2} = |c|,$$

was die gewünschte Ungleichung ist.

(e) Man beachte, dass wenn a, b wie in der Aufgabe existieren, so gilt:

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{2}(|w| + c) - \frac{1}{2}(|w| - c) = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = c$$

Ferner sehen wir mittels binomischer Formel, dass:

$$(2ab)^2 = 4a^2b^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}(|w| + c) \cdot \frac{1}{2}(|w| - c) = |w|^2 - c^2 = c^2 + d^2 - c^2 = d^2.$$

Damit sind die gewünschten Identitäten bewiesen.

(f) Aus den vorherigen Teilaufgaben folgt, dass zu jedem $w = c + di \in \mathbb{C}$ reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$a^2 - b^2 = c, \qquad (2ab)^2 = d^2.$$

Die zweite Gleichung impliziert, dass entweder $2ab = d$ oder $2ab = -d$ gilt. Im ersten Fall haben wir dank Teilaufgabe a) eine Wurzel $z = a + bi$ gefunden. Im zweiten Fall bemerken wir, dass wir problemlos $-a$ bzw. $-b$ statt a bzw. b verwenden können, da diese noch immer Gleichung (1) erfüllen. Dann gilt aber $2(-a)b = -2ab = -(-d) = d$. Somit haben wir eine Wurzel im zweiten Fall gefunden. Man beachte, dass zwei Wurzeln existieren und man beide durch Wechsel des Vorzeichens von a und b zugleich erhalten kann.

4.2. Produkt von Folgen

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist (d.h. $\exists\, C > 0$ so dass $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq C$).
Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Lösung. Wir verwenden die Definition der Konvergenz gegen 0. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Da die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert ein $C > 0$, sodass $|b_n| \leq C$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Wir setzten nun $\tilde{\varepsilon} = \frac{\epsilon}{C}$. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt $|a_n| < \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{C}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$,

$$|a_n b_n| \leq |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war schliessen wir, dass $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

4.3. Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n+3}{n^2+2}$,

(b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5}$,

(c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$,

(d) $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{\sin(n)}{2^n} + \frac{\cos(n)}{n^4}\right)$.

Hinweis: *Für d) benützen Sie Aufgabe (Produkt von Folgen)*

Lösung.

(a) Wir kürzen Zähler und Nenner mit n^2 und finden:

$$\frac{n^2-n+3}{n^2+2} = \frac{1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}$$

Nutzen wir nun Satz 3.3.2, so sehen wir aufgrund der Tatsache, dass $1/n, 1/n^2$ Nullfolgen sind:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n+3}{n^2+2} &= \frac{\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

(b) Wir sehen sofort:

$$\frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5} = \frac{\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n n^2}}{1+\frac{5}{2^n n^2}}$$

Aus Satz 3.3.2. folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n n^2}}{1+\frac{5}{2^n n^2}}\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n n^2}}{\lim_{n\to\infty}1+\frac{5}{2^n n^2}}\\ &= \frac{0}{1}=0.\end{aligned}$$

Wobei wir verwendet haben, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n}=0$ für jede Potenz $k\in\mathbb{N}$, siehe Vorlesung.

(c) Es gilt:

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = \frac{n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{n} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$$

Da $1/n^2$ eine Nullfolge ist, erwarten wir als Grenzwert 1. Wir wollen also nun den folgenden Ausdruck betrachten:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1 &= \frac{(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1)(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1)}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1}\\ &= \frac{1-\frac{1}{n^2}-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1}\\ &= \frac{-1}{n^2(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1)}\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1\geq 1$, daher finden wir:

$$\left|\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1\right| = \frac{1}{n^2(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

Da $\frac{1}{n^2}$ eine Nullfolge ist, sehen wir, dass für jedes $\epsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$ existiert mit

$$\left|\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1\right| < \epsilon, \quad \forall\, n\geq N.$$

Dies zeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = 1.$$

(d) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Desweiteren gilt $|\sin(n)| \leq 1$, $|\cos(n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also sind die Folgen $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Aus der Aufgabe "Produkt von Folgen" folgt nun, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} \sin(n) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n) = 0.$$

Mithilfe von Satz 3.3.2 schliessen wir also

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{\sin(n)}{2^n} + \frac{\cos(n)}{n^4} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} \sin(n) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n) = 0$$

.

4.4. Wurzelberechnung

Es sei $c \geq 1$ eine reelle Zahl. Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die folgende Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} a_1 &= c, \\ \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \end{aligned}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{c}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$1 \leq a_n \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n folgende Ungleichung gilt:

$$a_n^2 \geq c$$

(c) Zeigen Sie, dass die Folge monoton fallend ist, d.h. für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$a_n \geq a_{n+1}$$

(d) Argumentieren Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und der Grenzwert a die folgende Gleichung erfüllt:

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right).$$

Folgern Sie, dass $a^2 = c$.

(e) Für $c = 3$, berechnen Sie (mit dem Taschenrechner/Computer) a_2, a_3, a_4 und a_5. Wieviele Stellen nach dem Komma stimmen bei a_5 bereits mit $\sqrt{3}$ überein?

Lösung.

(a) Es ist $a_1 = c$, also gilt die Ungleichung sicherlich für $n = 1$. Wir fahren per Induktion fort. Man nehme an, dass:

$$1 \leq a_n \leq c,$$

für ein n gilt. Dann folgern wir:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c}{c}\right) = 1,$$

da $1 \leq a_n \leq c$. Vollkommen analog folgt die andere Ungleichung:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(c + \frac{c}{1}\right) = c.$$

(b) Wir bemerken, dass $a_n \geq 1$ für alle n. Es reicht, die Ungleichung für alle $n \geq 2$ zu zeigen, da $a_1^2 = c^2 \geq c$ wegen $c \geq 1$. Somit können wir uns darauf konzentrieren, a_{n+1} für $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten, wobei wir die rekursive Formel verwenden:

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^2 - c &= \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)^2 - c \\
&= \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2a_n\frac{c}{a_n} + \frac{c^2}{a_n^2} - 4c\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(a_n^2 - 2 \cdot c + \frac{c^2}{a_n^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{c}{a_n}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Somit folgt die gewünschte Ungleichung.

(c) Wir betrachten den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{c}{a_n}\right) \\
&= \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - c\right) \geq 0,
\end{aligned}$$

wobei wir $a_n \geq 1 > 0$ sowie $a_n^2 \geq c$ für alle natürlichen Zahlen n verwendet haben.

(d) Da die Folge nach unten beschränkt und monoton fallend ist, konvergiert sie gemäss Satz 3.3.1 (Monotone Konvergenz). Wir schreiben $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.
(Im Skript ist der Satz nur für monoton wachsende Folgen formuliert. Aber $-a_n$ ist eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge, auf die der Satz angewandt werden kann. Dann konvergiert also die Folge $-a_n$ und somit auch die Folge $a_n = -1 \cdot (-a_n)$ gemäss Satz 3.3.2).

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} = 1/2(a_n + c/a_n)$$

Die linke Seite dieser Gleichung konvergiert gegen a und die rechte Seite konvergiert gemäss Satz 3.3.2 gegen

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right).$$

Wir finden also

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right)$$

Dies ist die gesuchte Gleichung für a. Durch Umformen vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$2a^2 = a^2 + c \;\Rightarrow\; a^2 = c \;\Rightarrow\; a = \sqrt{c}$$

Beachten Sie, dass in der letzten Implikation $a \geq 0$ verwendet wurde, was aus der Nicht-Negativität der Folgeglieder folgt.

(e) Die Folgeglieder sind:

$$a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1.75,\ a_4 = 1.73214,\ a_5 = 1.73205081$$

Vergleicht man dies mit:

$$\sqrt{3} \sim 1.732050808...,$$

so sehen wir, dass a_5 bis zur siebten Nachkommastelle mit $\sqrt{3}$ übereinstimmt.

4.5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{16n^3 + 100n + 1000000}{27n^3 + 10920n + 2020}$$

(i) Divergiert, d.h. keine Konvergenz

(ii) Konvergiert, mit Grenzwert 0

(iii) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{16}{27}$

(iv) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{4}{9}$

(v) Konvergiert, mit Grenzwert 1000000

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{n^2}{2^n n^2 + 8}$$

(i) Divergiert, d.h. keine Konvergenz

(ii) Konvergiert, mit Grenzwert 0

(iii) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{2}$

(iv) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{4}$

(v) Konvergiert, mit Grenzwert 1

(c) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{n^3 + 22n^2 - 10}{29n^2 - 27n + 8}$$

(i) Divergiert, d.h. keine Konvergenz

(ii) Konvergiert, mit Grenzwert 0

(iii) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{29}$

(iv) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{22}{29}$

(v) Konvergiert, mit Grenzwert 29

Lösung.

(a) (iii)

(b) (ii)

(c) (i)