

Diese Übungsserie dient der Repetition von Gymnasialstoff. Ein Teil des hier behandelten Stoffes wird in der Vorlesung Analysis 1 aufgefrischt. Es ist daher nicht schlimm, wenn Sie nicht alle Aufgaben lösen können. Falls diese Aufgaben Ihnen jedoch einige Mühe bereiten, empfehlen wir Ihnen den Brückenkurs Mathematik der ETH:

<https://pontifex.ethz.ch/site8/>

Weitere Repetitionsaufgaben bietet der Selbsteinschätzungstest Mathematik der ETH:

https://ethz.ch/content/dam/ethz/main/education/bachelor/studienberatung/Studienstart/files/Selbsteinschaetzungstest-Mathematik_12.10.21.pdf

0.1. Graphen von Funktionen und Mengen zeichnen

(i) Für jede der folgenden Funktionen einer reellen Variable zeichnen Sie vier Punkte in der Ebene, die auf dem Graphen der Funktion liegen. Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte an. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

a) $\exp_2$, die Exponentialfunktion zur Basis 2, welche durch $\exp_2(x) := 2^x$ definiert ist

b) $\log_2$, die Logarithmusfunktion zur Basis 2

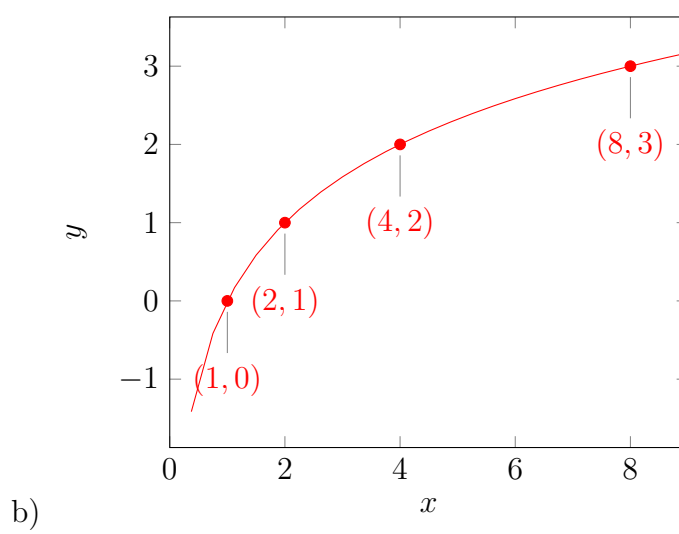
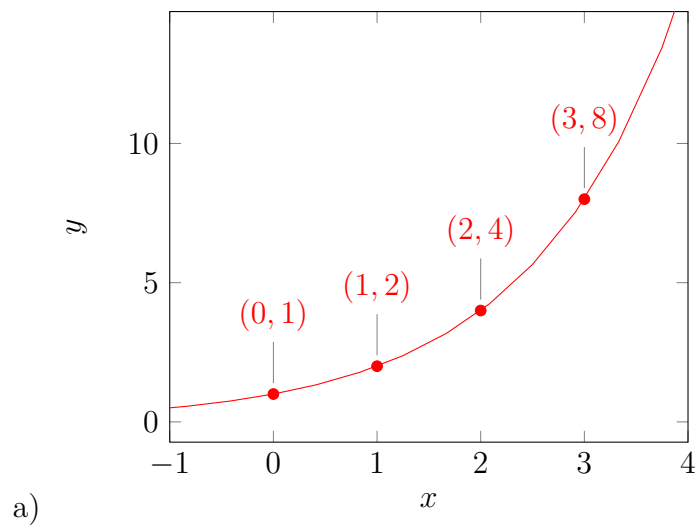
c) Sinusfunktion

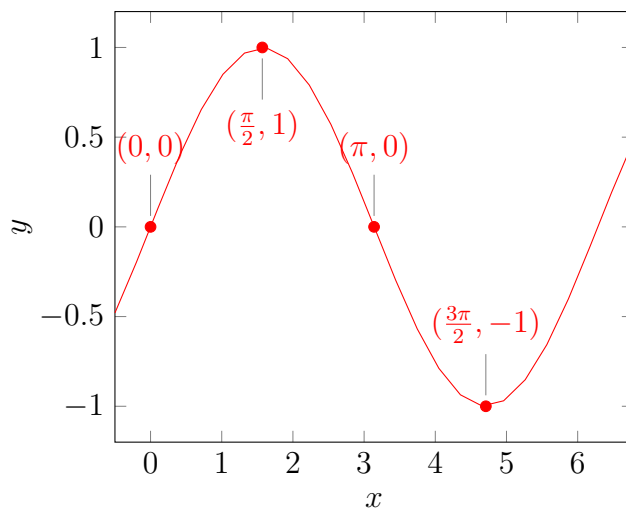
d) Kosinusfunktion

e) $f(x) := e^{-x^2}$

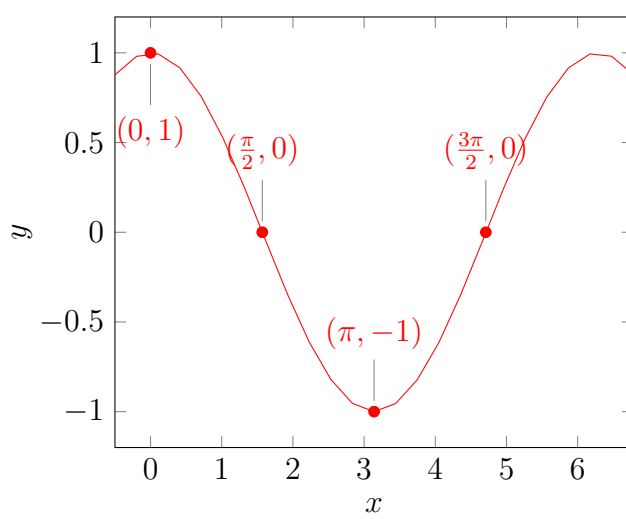
Bemerkung: Diese Funktion heisst *gaußsche Glockenfunktion*. Sie spielt eine wichtige Rolle in der Statistik.

Lösung.

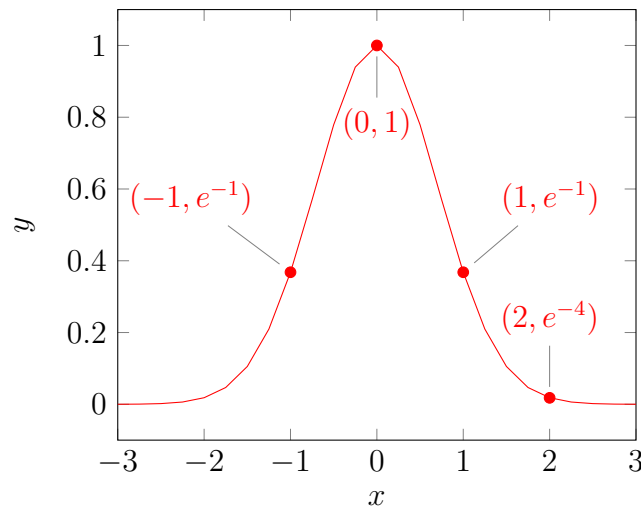




c)



d)



e)

- (ii) Wie hängen die Graphen von $\exp_2$ und $\log_2$ zusammen?

Lösung. Die beiden Funktionen sind die inverse der jeweils anderen Funktion. Im Graphen äussert sich das dadurch, dass er an der diagonalen $x = y$ gespiegelt ist.

0.2. Ableitung Wir schreiben e für die Eulersche Zahl.

- (i) Berechnen Sie die Ableitung f' jeder der folgenden Funktionen:

- a) $f(x) := x^2$
- b) $f(y) := y^2$
- c) $f(x) := e^x$
- d) $f(x) := e^{x^2} := e^{(x^2)}$

Lösung.

- a) $f'(x) = 2x$
- b) $f'(y) = 2y$
- c) $f'(x) = e^x$
- d) $f'(x) = 2xe^{x^2}$

- (ii) Bestimmen Sie $f'(0)$ für jede dieser Funktionen.

Lösung.

- a) $f'(0) = 0$
- b) $f'(0) = 0$

c) $f'(0) = 1$

d) $f'(0) = 0$

0.3. Integral, Ableitung

(i) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^1 x \, dx$

b) $\int_0^1 x e^{x^2} \, dx$

c) $\int_{-1}^1 |x| \, dx$

d) $\int_{-1}^1 |y| \, dy$

Lösung.

a) $\int_0^1 x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$

b) Wir nehmen das Resultat aus Aufgabe 0.2)i)d), dass $f'(x) = (e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$ ist. Dann ist es einfach zu sehen, dass $\int_0^1 x e^{x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{2} f'(x) \, dx = \left[\frac{1}{2} f(x) \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(e - 1)$

c) $\int_{-1}^1 |x| \, dx = \int_{-1}^0 |x| \, dx + \int_0^1 |x| \, dx = \int_{-1}^0 -x \, dx + \int_0^1 x \, dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

d) Der Name der Variable spielt keine Rolle. Das Integral ist daher das Selbe wie in der Vorherigen Aufgabe und wir wissen, dass $\int_{-1}^1 |y| \, dy = \int_{-1}^1 |x| \, dx = 1$

(ii) Wir definieren die Funktion f durch $f(x) := \int_1^x \cos(y) \, dy$. Bestimmen Sie die Ableitung von f .

Lösung. Wir wissen, dass für eine beliebige Funktion $g(x)$ gilt, dass $\int_0^x g'(y) \, dy = g(x) + C$. Also bringen wir die Funktion $f(x)$ aus der Aufgabe in diese Form. $f(x) = \int_1^x \cos(y) \, dy = \int_0^x \cos(y) \, dy - \int_0^1 \cos(y) \, dy$. Indem wir $C = \int_0^1 \cos(y) \, dy$

setzen, kommen wir auf $f(x) + C = \int_0^x \cos(y) \, dy = \int_0^x f'(y) \, dy$ und können ablesen, dass $f'(x) = \cos(x)$.

- (iii) Bestimmen Sie die Ableitung von f im Punkt $\frac{\pi}{2}$.

Lösung. $f'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

0.4. wenn, (entweder) oder, es gibt, für jedes

- (i) Für welche natürliche Zahlen n ist die folgende Aussage wahr:

“Wenn n gerade ist, dann ist $n + 1$ ungerade.”

Lösung. Die Aussage ist für alle natürlichen Zahlen wahr.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- (ii) “Wenn 1 gerade ist, dann ist 2 ungerade.”

Lösung. 1 ist nicht gerade, also sagt die Aussage auch nicht, dass 2 ungerade ist. Die Aussage ist somit wahr.

- (iii) “ $1 + 1 = 2$ oder 1 ist ungerade.”

Lösung. Beide Aussagen sind wahr, also ist auch die Veroderung davon wahr.

- (iv) “Entweder ist $1 + 1 = 2$ oder 1 ist ungerade.”

Lösung. Beide Aussagen sind wahr. Bei entweder oder muss aber genau eine der Aussagen wahr sein. Die Aussage ist daher falsch.

- (v) “Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl n , sodass $m \leq n$ gilt.”

Lösung. Diese Aussage ist wahr. Egal wie gross wir m wählen, wir können immer eine noch grössere natürliche Zahl n finden.

- (vi) “Es gibt eine natürliche Zahl n , sodass für jede natürliche Zahl m gilt, dass $m \leq n$.”

Lösung. Falsch. Dies würde bedeuten, dass es eine grösste natürliche Zahl n gibt.

0.5. Mengen

- (i) Wie viele Elemente haben die folgenden Mengen?

a) die leere Menge $\emptyset$

b) $\{\emptyset\}$

c) $\{0, 1, 0\}$

d) $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Lösung.

- a) Die leere Menge ist leer und enthält deshalb null Elemente.
- b) Die Menge enthält die leere Menge. Also ein Element.
- c) Ein Element kann nur ein einziges mal in der Menge vorkommen. Die Menge enthält also nur die zwei Elemente 0 und 1.
- d) Egal was n ist, $(-1)^n$ ist immer entweder 1 oder -1. Die Menge enthält also diese zwei Elemente.

(ii) Was ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 + x - 2 = 0?$$

Lösung. Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}$. Die Lösungsmenge ist also $\{1, -2\}$.

(iii) Zeichnen Sie die folgenden Mengen.

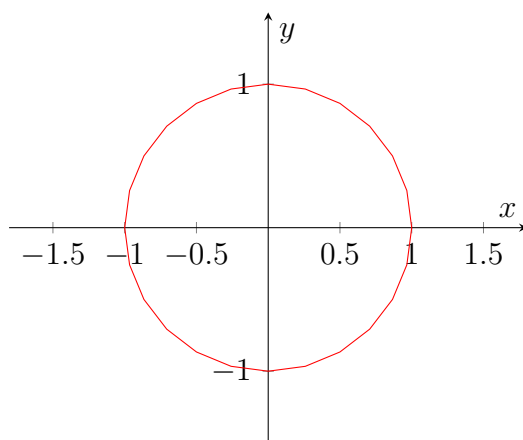
a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Bemerkung: $\mathbb{R}^2$ ist die (euklidische) Ebene.

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

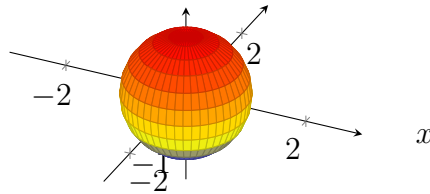
Bemerkung: $\mathbb{R}^3$ ist der dreidimensionale (euklidische) Raum.

Lösung.



a)

y



b)

0.6. Folge, Konvergenz, Grenzwert Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots\}$ und $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit und ohne 0. Berechnen Sie die ersten 6 Glieder der folgenden Folgen:

(i) $(a_n := n^2)_{n \in \mathbb{N}_0}$

Lösung. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16, a_5 = 25$

(ii) die rekursiv definierte Folge $a_0 := 0, a_1 := 1, a_n := a_{n-2} + a_{n-1}$, für $n \geq 2$

Lösung. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5$

(iii) Entscheiden Sie für jede der folgenden Folgen, ob sie konvergiert. Falls das der Fall ist, geben Sie dann den Grenzwert an.

a) $(a_n := n^2)_{n \in \mathbb{N}_0}$

b) $\left(a_n := \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

c) $\left(a_n := \frac{n+1}{n+2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Lösung.

a) Die Folge wird beliebig gross, also konvergiert sie nicht.

b) Die Folge konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

c) Die Folge konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

0.7. Summe, Induktion, (unendliche) Summe

(i) Berechnen Sie

$$\sum_{i=1}^4 i.$$

Lösung. $\sum_{i=1}^4 i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

(ii) Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ schreiben Sie $\sum_{i=1}^k i$ als eine Summe, in welcher der Index i von 1 bis $k-1$ läuft, plus einen zusätzlichen Term. (Hierbei ist $\sum_{i=1}^0 a_i$ die leere Summe, also gleich 0.)

Lösung. $\sum_{i=1}^k i = k + \sum_{i=1}^{k-1} i$

(iii) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl die folgende Gleichheit gilt:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tip: Verwenden Sie (vollständige) Induktion.

Bemerkung: Induktion wird in Analysis 1 nochmals behandelt.

Lösung.

- *Induktionsanfang:* $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 i = 1$$

- *Induktionsschritt:* Wir nehmen an, dass $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$. Dann

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = n+1 + \sum_{i=1}^n i = n+1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n+2 + n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(iv) Berechnen Sie die unendliche Summe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Lösung. Die unendliche Summe ist eine geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ mit $q = \frac{1}{2}$. Der Wert einer geometrischen Reihe ist $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$. Mit $q = \frac{1}{2}$ ergibt das

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2.$$