Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

## 1.1. Verknüpfungen von Aussagen

**(a)** Schreiben Sie jede der folgenden Aussagen mittels mathematischer Symbole, ohne Wörter. Verwenden Sie das Negationszeichen $\neg$ und die Verknüpfungszeichen $\wedge, \vee, \dot{\vee}, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ :

a) "Null plus eins ist eins, und null ist grösser als eins."

b) "Null plus eins ist eins, oder null ist kleiner als eins."

c) "Entweder ist null plus eins gleich eins, oder null ist kleiner als eins."

d) "Wenn null grösser als eins ist, dann ist null plus eins gleich null."

e) "Null ist genau dann grösser als eins, wenn null plus eins gleich eins ist."

**(b)** Bestimmen Sie für jede der obigen Aussagen, ob sie wahr ist.

**Lösung.**

**(a)**
a) $0 + 1 = 1 \wedge 0 > 1$

b) $0 + 1 = 1 \vee 0 < 1$

c) $0 + 1 = 1 \dot{\vee} 0 < 1$

d) $0 > 1 \Rightarrow 0 + 1 = 0$

e) $0 > 1 \Leftrightarrow 0 + 1 = 1$

**(b)**
a) Falsch

b) Wahr

c) Falsch

d) Wahr

e) Falsch

## 1.2. Wahrheitstafeln, logische Äquivalenz

**(a)** **(∗)** Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden verknüpften Aussagen:

$$\neg(P \wedge Q), \qquad (\neg P) \vee (\neg Q).$$

**(b)** Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q), \tag{1}$$

d. h., die Aussagen $\neg(P \wedge Q)$ und $(\neg P) \vee (\neg Q)$ sind logisch äquivalent.

**(c)** Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden verknüpften Aussagen:

$$\neg(P \vee Q), \qquad (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

**(d)** Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q). \tag{2}$$

**Bemerkung:** (1,2) sind die de-morganschen Gesetze für Aussagen.

**(e)** Bestimmen Sie die Wahrheitstafel für die folgende verknüpfte Aussage:

$$(\neg Q) \Rightarrow \neg P.$$

**(f)** Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$P \Rightarrow Q \equiv (\neg Q) \Rightarrow \neg P. \tag{3}$$

**Bemerkung:** *Kontraposition* (oder *Umkehrschluss*) ist die logische Schlussregel, die von der Implikation $P \Rightarrow Q$ auf ihr Kontraponiertes $(\neg Q) \Rightarrow \neg P$ schliesst. Diese Regel ist gültig wegen (3).

**(g)** Bestimmen Sie die Wahrheitstafel für die folgende verknüpfte Aussage:

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

**(h)** Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

**(i)** Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden verknüpften Aussagen:

$$P \wedge (Q \vee R), \qquad (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

**(j)** Zeigen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R). \tag{4}$$

**Bemerkungen:**

- Das ist das *Distributivgesetz* für die Konjunktion $\wedge$ und die Disjunktion $\vee$. Dieses Gesetz ist analog zum Distributivgesetz für die Multiplikation und Addition von Zahlen.
- Bemerkenswerterweise gilt das Distributivgesetz für $\wedge$ und $\vee$ auch umgekehrt, also:

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R). \tag{5}$$

  Dadurch unterscheiden sich die Konjunktion und die Disjunktion von der Multiplikation und Addition von Zahlen.

**(k)** Gilt

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee R?$$

**(l)** Überlegen Sie sich, welche mathematischen Interpretationen die alltägliche Äusserung "Für den angegebenen Preis erhalten Sie das Menü und Kaffee oder Kuchen." besitzt. Geben Sie für jede Interpretation die Wahlmöglichkeiten an, die der Kunde/ die Kundin besitzt. Sind die Interpretationen zueinander äquivalent? Welche mathematischen Interpretationen hat die gleiche Äusserung mit "oder" ersetzt durch "entweder ... oder"?

**Lösung.**

**(a)**

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $\neg(P \wedge Q)$ |
|---|---|---|---|
| F | F | F | T |
| F | T | F | T |
| T | F | F | T |
| T | T | T | F |

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $(\neg P) \vee (\neg Q)$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | T | T | T |
| F | T | T | F | T |
| T | F | F | T | T |
| T | T | F | F | F |

**(b)** Die beiden Wahrheitstafeln haben die selben Einträge. Daher sind die Aussagen $\neg(P \wedge Q)$ und $(\neg P) \vee (\neg Q)$ logisch äquivalent.

**(c)**

| $P$ | $Q$ | $\neg(P \vee Q)$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | F |

| $P$ | $Q$ | $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | F |

**(d)** Die beiden Wahrheitstafeln haben die selben Einträge. Daher sind die Aussagen $\neg(P \vee Q)$ und $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ logisch äquivalent.

**(e)**

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $(\neg Q) \Rightarrow \neg P$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | T | T | T |
| F | T | T | F | T |
| T | F | F | T | F |
| T | T | F | F | T |

**(f)** Die Wahrheitstafel für $P \Rightarrow Q$ ist aus der Vorlesung bekannt als

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

Durch Vergleichen der Einträge sehen wir, dass $P \Rightarrow Q$ und $(\neg Q) \Rightarrow \neg P$ logisch äquivalent sind.

**(g)**

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $Q \Rightarrow P$ | $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | T | T | T |
| F | T | T | F | F |
| T | F | F | T | F |
| T | T | T | T | T |

**(h)** Die Wahrheitstafel für $P \Leftrightarrow Q$ ist aus der Vorlesung bekannt als

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

Durch Vergleichen der Einträge sehen wir, dass $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ und $P \Leftrightarrow Q$ logisch äquivalent sind.

**(i)**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \vee R$ | $P \wedge (Q \vee R)$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | F |
| F | F | T | T | F |
| F | T | F | T | F |
| F | T | T | T | F |
| T | F | F | F | F |
| T | F | T | T | T |
| T | T | F | T | T |
| T | T | T | T | T |

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \wedge Q$ | $P \wedge R$ | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | F | F |
| F | F | T | F | F | F |
| F | T | F | F | F | F |
| F | T | T | F | F | F |
| T | F | F | F | F | F |
| T | F | T | F | T | T |
| T | T | F | T | F | T |
| T | T | T | T | T | T |

**(j)** Die beiden Wahrheitstafeln haben die selben Einträge. Daher sind die Aussagen $P \wedge (Q \vee R)$ und $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ logisch äquivalent.

**(k)** Nein, da sich die beiden Wahrheitstafeln in der folgenden Zeile unterscheiden:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \wedge (Q \vee R)$ | $(P \wedge Q) \vee R$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | T | F | T |

**Bemerkung:** Es spielt bei mit *und*, *oder* verknüpften Aussagen also eine Rolle, wie wir die Klammern setzen.

**(l)** Es gibt zwei Interpretationen der Äusserung, die sich dadurch unterscheiden, dass Klammern verschieden gesetzt werden. Wir schreiben:

$M$ := "Für den angegebenen Preis erhalten Sie das Menü."

$Ka$ := "Für den angegebenen Preis erhalten Sie Kaffee."

$Ku$ := "Für den angegebenen Preis erhalten Sie Kuchen."

Interpretation A: $M \wedge (Ka \vee Ku)$

Das bedeutet, dass der Kunde/ die Kundin die folgenden Wahlmöglichkeiten hat:

- Menü und Kaffee
- Menü und Kuchen

- Menü und Kaffee und Kuchen

  **Bemerkung:** Hierbei haben wir verwendet, dass $\vee$ (*oder*) inklusiv ist.

Interpretation B: $(M \wedge Ka) \vee Ku$ Das bedeutet, dass der Kunde/ die Kundin die folgenden Wahlmöglichkeiten hat:

- Menü und Kaffee
- Kuchen
- Menü und Kaffee und Kuchen

  **Bemerkung:** Hierbei haben wir verwendet, dass $\vee$ (*oder*) inklusiv ist.

Die zweite Wahlmöglichkeit ist also je nach Interpretation verschieden.

Falls wir in der Äusserung das (inklusive) *Oder* durch das *exklusive Oder* (= *entweder ... oder*) ersetzen, dann gibt es die folgenden zwei Interpretationen der Äusserung:

Interpretation A': $M \wedge (Ka \dot{\vee} Ku)$ Das bedeutet, dass der Kunde/ die Kundin die folgenden Wahlmöglichkeiten hat:

- Menü und Kaffee
- Menü und Kuchen

Interpretation B': $(M \wedge Ka) \dot{\vee} Ku$ Das bedeutet, dass der Kunde/ die Kundin die folgenden Wahlmöglichkeiten hat:

- Menü und Kaffee
- Kuchen

Die zweite Wahlmöglichkeit ist also je nach Interpretation verschieden.

In der alltäglichen Äusserung "Für den angegebenen Preis erhalten Sie das Menü und Kaffee oder Kuchen." ist *oder* wohl im ausschliessenden Sinn gemeint, also *entweder ... oder*, $\dot{\vee}$. Die Äusserung ist wohl mit Klammern um *Kaffee oder Kuchen* gemeint. Das ergibt sich aus dem Kontext, da Kaffee und Kuchen oft zusammen eingenommen werden. Das entspricht Interpretation A'.

### 1.3. Beweise

**Bemerkung:** In dieser Aufgabe dürfen Sie Eigenschaften von Zahlen, die Sie aus dem Gymnasium kennen, ohne Beweis verwenden. Geben Sie an, wo Sie welche Eigenschaft verwenden.

**Hinweis:** Wenn Sie nicht weiterkommen, schauen Sie sich dann die Beweise ähnlicher Sätze in der Vorlesung an.

**(a)** **(∗)** Beweisen Sie den folgenden Satz:

**Satz 1.** *Die Zahl*

$$5 \cdot 4^{\frac{(3 \cdot 123456789+1)^2-1}{3}}$$

*ist ganz.*

**(b)** Beweisen Sie die folgenden Sätze

- mittels Kontraposition,
- mittels Widerspruch:

a)

**Satz 2.** *Es gilt:*

$$\sqrt{3} < \sqrt{5}$$

b)

**Satz 3.** *Es gilt:*

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} < \sqrt{6}$$

**(c)** Ist die folgende Argumentation ein (korrekter) Beweis? Falls nein, warum nicht?

"Satz": Es gilt: $0 = 1$

"Beweis": Wir subtrahieren 1 auf beiden Seiten: $0 - 1 = 1 - 1 = 0$

Wir multiplizieren mit 0: $0 \cdot (0-1) = 0 \cdot 0$

Da $0 \cdot x = 0$, erhalten wir: $0 = 0$

Damit haben wir gezeigt, dass $0 = 1$.

**Lösung.**

**(a)** Im Beweis dieses Satzes werden wir die folgende Aussage verwenden, die schon bewiesen worden ist.

**Lemma 4** (erste binomische Formel)**.** *Für alle reellen Zahlen $x$ und $y$ gilt, dass*

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Wir werden auch das folgende schon bewiesene Lemma verwenden.

**Lemma 5** (Produkte und Potenzen ganzer Zahlen)**.** *Die folgenden Aussagen gelten:*

*a) Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist ganz.*

*b) Jede Potenz mit ganzer Basis und natürlichem Exponenten*[1] *ist ganz.*

**Beweis des Satzes 1:** Wir definieren

$$m := 123456789.$$

Gemäss Lemma 4 gilt

$$\begin{aligned} n := \frac{(3m+1)^2 - 1}{3} &= \frac{(3m)^2 + 2 \cdot 3m \cdot 1 + 1^2 - 1}{3} \\ &= 3m^2 + 2m. \end{aligned}$$

Das ist eine ganze Zahl. Sie ist positiv. Wir verwenden den **Modus ponens**:

$n$ ist natürlich. (Siehe oben.)

Wenn $n$ natürlich ist, dann ist $4^n$ ganz. (Lemma 5b))

---

$4^n$ ist ganz.

Wir verwenden den **Modus ponens** nochmals:

$\ell := 4^n$ ist ganz. (Siehe oben.)

Wenn $\ell$ ganz ist, dann ist $5\ell$ ganz. (Lemma 5a))

---

$5\ell = 5 \cdot 4^n = 5 \cdot 4^{\frac{(3 \cdot 123456789+1)^2-1}{3}}$ ist ganz. Das beweist Satz 1. $\square$

**(b)** a) **Beweis des Satzes 2 mittels Kontraposition:** Wir betrachten die folgenden Aussagen:

$A :=$ “$\sqrt{3} \geq \sqrt{5}$”

$B :=$ “$3 \geq 5$”

Laut der Monotonie des Quadrierens (Lemma in den Vorlesungsnotizen) gilt $A \Rightarrow B$. Mittels Kontraposition folgt, dass $\neg B \Rightarrow \neg A$, also $3 < 5 \Rightarrow \sqrt{3} < \sqrt{5}$.

[1] D. h. der Exponent ist eine natürliche Zahl.

**Modus ponens**:

$3 < 5$ (Das folgt aus den Definitionen von 3 und 5.)

$3 < 5 \Rightarrow \sqrt{3} < \sqrt{5}$ (Siehe oben.)

---

$\sqrt{3} < \sqrt{5}$

Das beweist Satz 2. □

**Beweis des Satzes 2 mittels Widerspruch:** Wir nehmen widerspruchsweise an, dass $\sqrt{3} < \sqrt{5}$ falsch ist, d. h., dass $\sqrt{3} \geq \sqrt{5}$. Mit Hilfe des Modus ponens und Monotonie des Quadrierens (Lemma in den Vorlesungsnotizen) folgt daraus, dass $3 \geq 5$. Da dies klar falsch ist, muss unsere ursprüngliche Annahme falsch sein, d. h., $\sqrt{3} < \sqrt{5}$ ist wahr. Das beweist Satz 2.□

b) **Beweis des Satzes 3 mittels Kontraposition:** Wir betrachten die folgenden Aussagen:

$A :=$ "$\sqrt{5} \geq 3$"

$B :=$ "$5 \geq 9$

Laut der Monotonie des Quadrierens gilt $A \Rightarrow B$. Mittels Kontraposition erhalten wir daraus, dass $\neg B \Rightarrow \neg A$ gilt, d. h.

$$5 < 9 \Rightarrow \sqrt{5} < 3. \tag{6}$$

Wir betrachten jetzt die Aussagen

$C :=$ "$\sqrt{3+\sqrt{5}} \geq \sqrt{6}$"

$D :=$ "$3+\sqrt{5} \geq 6$"

Laut der Monotonie des Quadrierens gilt $C \Rightarrow D$. Mittels Kontraposition folgern wir daraus, dass $\neg D \Rightarrow \neg C$, d. h.

$$3+\sqrt{5} < 6 \Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{5}} < \sqrt{6}.$$

Indem wir das mit der Aussage (6) kombinieren, folgt, dass die folgende Implikation gilt:

$$5 < 9 \Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{5}} < \sqrt{6}$$

(Warum?) Modus ponens:

$5 < 9$ (Das folgt aus den Definitionen von 5 und 9.)

$5 < 9 \Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{5}} < \sqrt{6}$ (Siehe oben.)

$$\frac{\begin{array}{l} 5<9 \\ 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{5}} < \sqrt{6} \end{array}}{\sqrt{3+\sqrt{5}} < \sqrt{6}}$$

Das beweist Satz 3.□

**Beweis des Satzes 3 mittels Widerspruch:** Wir nehmen widerspruchsweise an, dass $\sqrt{3+\sqrt{5}} \geq \sqrt{6}$. Mittels Monotonie des Quadrierens und Modus ponens erhalten wir daraus, dass $3+\sqrt{5} \geq 6$ gilt, d. h. $\sqrt{5} \geq 3$. Mittels Monotonie des Quadrierens und Modus ponens erhalten wir hieraus, dass $5 \geq 9$ gilt. Das ist ein Widerspruch. Das beweist Satz 3. □

**(c)** Der "Beweis" ist nicht korrekt. Er startet nämlich mit der falschen Annahme, dass $0 = 1$. Das ist nicht zulässig, da wir diese Aussage ja *beweisen* möchten. (Den Modus ponens können wir nur anwenden, wenn beide Prämissen $A$ und $A \Rightarrow B$ wahr sind.) Die weiteren Schlussfolgerungen sind zwar gültig, aber nicht hilfreich.

**Bemerkungen:**

- *Gültig* bedeutet hier, dass wir logisch richtig schlussfolgern. Das bedeutet im Allgemeinen nicht, dass die erhaltenen Aussagen wahr sind, da wir ja von einer falschen Aussage ($0 = 1$) ausgehen. Wie in der Vorlesung besprochen, gilt *ex falso quodlibet*, d. h., wir können aus einer falschen Aussage jede beliebige Aussage herleiten. Die weiteren Schlussfolgerungen sind daher nicht hilfreich.
- Im letzten Schritt schliessen wir, dass $0 = 0$. Das ist zwar wahr, zeigt aber nicht, dass der "Satz" wahr ist.

**1.4. Induktion** Beweisen Sie die folgenden Formeln mittels Induktion:

**(a)** **($*$)** $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für alle natürlichen Zahlen $n$.

**(b)** $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ für alle natürlichen Zahlen $n$.

**(c)** $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \neq 1$.

**(d)** $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Lösung.**

**(a)** **Verankerung:** Im Fall $n = 1$ ist die Formel trivial:

$$1^2 = 1 = \frac{1}{6} 1 \cdot 2 \cdot 3$$

**Induktionsannahme:** Die Formel gilt für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

**Induktionsschritt:** Betrachten wir nun die folgende Summe:

$$\begin{aligned}
1^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= (n+1)\Big(\frac{1}{6} n(2n+1) + (n+1)\Big) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\Big(n(2n+1) + 6n + 6\Big) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1),
\end{aligned}$$

wobei beim ersten Gleichheitszeichen die Induktionsannahme angewandt wurde. Somit haben wir die gewünschte Formel für $n + 1$ gezeigt und die allgemeine Formel daher per Induktion bewiesen.

**(b)** **Verankerung:** Im Fall $n = 1$ ist die Formel trivial:

$$1^3 = 1 = \Big(\frac{1}{2} 1 \cdot 2\Big)^2$$

**Induktionsannahme:** Die Formel gilt für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

**Induktionsschritt:** Betrachten wir nun die folgende Summe:

$$\begin{aligned}
1^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 &= \Big(\frac{1}{2} n(n+1)\Big)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2\Big(n^2 + 4(n+1)\Big) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \\
&= \Big(\frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)\Big)^2,
\end{aligned}$$

wobei beim ersten Gleichheitszeichen die Induktionsannahme angewandt wurde. Somit haben wir die gewünschte Formel für $n+1$.

**(c)** **Verankerung:** Im Fall $n = 0$ ist die Formel schlicht die dritte binomische Formel:

$$(1+x) = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

**Induktionsannahme:** Die Formel gilt für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

**Induktionsschritt:** Betrachten wir nun das folgende Produkt:

$$\begin{aligned}(1+x)\dots(1+x^{2^n})(1+x^{2^{n+1}}) &= \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \cdot (1+x^{2^{n+1}}) \\ &= \frac{(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^{n+1}})}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2\cdot 2^{n+1}}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2^{(n+1)+1}}}{1-x},\end{aligned}$$

wobei beim ersten Gleichheitszeichen die Induktionsannahme angewandt und beim dritten Gleichheitszeichen die dritte binomische Formel verwendet wurde. Somit haben wir die gewünschte Formel für $n+1$ gezeigt.

**(d)** **Verankerung:** Für $n = 1$ ist die Aussage trivial:

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1$$

**Induktionsannahme:** Die Formel gelte nun für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

**Induktionsschritt:** Betrachten wir die Summe, so sehen wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= (n+1)\cdot(n+1)! + \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \\ &= (n+1)\cdot(n+1)! + (n+1)! - 1 \\ &= ((n+1)+1)\cdot(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)\cdot(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1,\end{aligned}$$

was die gesuchte Identität für $n+1$ ist.

### 1.5. Induktionsbeweis

Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis? Begründen Sie Ihre Antwort!

**Behauptung** *Alle Pferde haben dieselbe Farbe.*

**Beweis** Sei $P(n)$ die Aussageform, dass in jeder Ansammlung von $n$ Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. $P(1)$ ist offensichtlich wahr.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr sei, und wollen $P(k+1)$ beweisen: Nehmen wir eine beliebige Gruppe von $k+1$ Pferden. Schicken wir eines weg, so bleiben $k$ Pferde über, die also alle die gleiche Farbe haben. Holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes weg, so bleiben wieder $k$ Pferde über, die dann auch alle die gleiche Farbe haben. Pferde ändern ihre Farbe nicht, also muss dies dieselbe Farbe wie die der ersten Gruppe sein. Somit haben alle $k+1$ Pferde die gleiche Farbe. Damit gilt $P(k)$ für alle $k \geq 1$.

Q.E.D.

**Lösung.** Der Schritt von $k = 1$ zu $k + 1 = 2$ ist falsch!
Wenn man je 1 Pferd wegnimmt, ist das übriggebliebene Pferd zwar einfarbig, aber entgegen der Behauptung müssen die Farben nicht gleich sein.

## 1.6. Online-MC

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Online über Moodle, siehe Vorlesungswebseite.

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

**(a)** Wählen Sie die richtige Aussagen.

- **(i)** Seien $A$ und $B$ mathematische Aussagen. Dann ist $(\neg A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ immer wahr.
- **(ii)** Seien $A$ und $B$ mathematische Aussagen. Dann ist $(A \vee (\neg A \wedge B)) \Leftrightarrow (A \vee B)$ immer wahr.

**(b)** Welches ist die Negation dieser Aussage: "Es regnet und ich habe keinen Regenschirm"?

- **(i)** Es regnet nicht oder ich habe einen Regenschirm.
- **(ii)** Es regnet nicht und ich habe keinen Regenschirm.
- **(iii)** Ich habe einen Regenschirm.
- **(iv)** Es regnet nicht, daher habe ich keinen Regenschirm.

**(c)** Welches ist das Kontraponierte dieser Aussage: "Wenn es regnet und ich keinen Regenschirm habe, werde ich nass"?

- **(i)** Wenn es nicht regnet, werde ich nicht nass und ich habe keinen Regenschirm.
- **(ii)** Wenn ich nass werde, regnet es und ich habe keinen Regenschirm.
- **(iii)** Wenn ich nicht nass werde, regnet es nicht oder ich habe einen Regenschirm.
- **(iv)** Wenn ich einen Regenschirm habe, regnet es nicht und ich werde nicht nass.

**(d)** Welche ist die Negation dieser Aussage: "10 ist gerade und ist kleiner oder gleich 11." ?

- **(i)** 10 ist nicht gerade.
- **(ii)** 10 ist grösser als 11.
- **(iii)** 10 ist nicht gerade oder ist grösser als 11.
- **(iv)** 10 ist nicht gerade, deshalb ist es grösser als 11.

**Lösung.**

**(a)** (ii)

**(b)** (i)

**(c)** (iii), das Kontraponierte einer Implikation $p \Rightarrow q$ ist gegeben durch $\neg q \Rightarrow \neg p$

**(d)** (iii)