Einige (Teil-)Aufgaben sind mit $(*)$ markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

2.1. Mengen, Mengenoperationen

(a) Vereinfachen Sie die Beschreibung der folgenden Mengen:

$$X := \Big\{1, 2, 1{+}1\Big\}, \qquad Y := \Big\{0{\cdot}n \,\Big|\, n \in \mathbb{N}_0\Big\}, \qquad Z := \Big\{n \in \mathbb{N}_0 \,\Big|\, n > 0 \wedge n \leq 3\Big\}$$

(b) $(*)$ Bestimmen Sie den Durchschnitt $X \cap Y$, die Vereinigung $X \cup Y$ und die Differenz $X \setminus Y$ für die Mengen

$$X := \{0, 1\}, \qquad Y := \{1, 2\}.$$

Ist X eine Teilmenge von Y? Warum?

(c) $(*)$ Bestimmen Sie das kartesisches Produkt $X \times Y$ und die kartesischen Potenzen Y^2, Z^3 für die Mengen

$$X := \Big\{\text{Apfel}, \text{Haus}\Big\}, \qquad Y := \{0, 1, 2\}, \qquad Z := \{0, 1\}.$$

(d) Zeichnen Sie die Menge

$$S := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, x \geq 0 \wedge x \leq y \wedge y \leq 1\Big\}.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und $i = 1, \ldots, n$ bezeichnen wir mit x_i die i-te Koordinate von x. Es gilt also $x = \big(x_1, \ldots, x_n\big)$. Wir definieren die euklidische Norm von x als

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{1}$$

Wir fixieren jetzt die Grundmenge $X := \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie die Mengen

$$A := \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, \|x\| \leq 1\Big\}, \qquad A^{\complement} = X \setminus A, \qquad B := \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, \|x\| = 1\Big\},$$
$$C := \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, x_1 \geq 0\Big\}, \qquad A \cap C, \qquad A \cup C.$$

Lösung.

(a) Vereinfachung der Mengenbeschreibungen:

$$X := \{1, 2, 1+1\} = \{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$$

Das Element $1 + 1$ ist gleich 2, daher enthält die Menge X nur die Elemente 1 und 2.

$$Y := \{0 \cdot n \,|\, n \in \mathbb{N}_0\} = \{0 \,|\, n \in \mathbb{N}_0\} = \{0\}$$

Da das Produkt von 0 mit jeder natürlichen Zahl n (inklusive 0) gleich 0 ist, enthält die Menge Y nur das Element 0.

$$Z := \{n \in \mathbb{N}_0 \,|\, n > 0 \,\text{und}\, n \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$$

Die Menge Z umfasst alle natürlichen Zahlen zwischen 1 und 3, also 1, 2 und 3.

Ergebnis: Die Mengen sind also:

$$X = \{1, 2\}, \quad Y = \{0\}, \quad Z = \{1, 2, 3\}$$

(b) Durchschnitt, Vereinigung und Differenz der Mengen:

Gegeben sind die Mengen $X = \{0, 1\}$ und $Y = \{1, 2\}$.

Durchschnitt:

$$X \cap Y = \{1\}$$

Das einzige gemeinsame Element der Mengen X und Y ist 1.

Vereinigung:

$$X \cup Y = \{0, 1, 2\}$$

Die Vereinigung enthält alle Elemente aus beiden Mengen.

Differenz:

$$X \setminus Y = \{0\}$$

Die Differenz $X \setminus Y$ enthält die Elemente, die in X, aber nicht in Y sind. Das ist nur das Element 0.

Ist X eine Teilmenge von Y?

Nein, X ist keine Teilmenge von Y, da das Element 0 in X liegt, aber nicht in Y. Damit ist die Bedingung für eine Teilmenge nicht erfüllt.

(c) Kartesisches Produkt und kartesische Potenzen:

Gegeben sind die Mengen $X = \{\text{Apfel}, \text{Haus}\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$ und $Z = \{0, 1\}$.

Kartesisches Produkt $X \times Y$:

$$X \times Y = \{(\text{Apfel}, 0), (\text{Apfel}, 1), (\text{Apfel}, 2), (\text{Haus}, 0), (\text{Haus}, 1), (\text{Haus}, 2)\}$$

Das kartesische Produkt $X \times Y$ besteht aus allen geordneten Paaren, die jeweils ein Element aus X und ein Element aus Y enthalten.

Kartesische Potenz Y^2:

$$Y^2 = Y \times Y = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$$

Die kartesische Potenz Y^2 besteht aus allen geordneten Paaren, die jeweils zwei Elemente aus Y enthalten.

Kartesische Potenz Z^3:

$$Z^3 = Z \times Z \times Z = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

Die kartesische Potenz Z^3 besteht aus allen geordneten Tripeln, die jeweils drei Elemente aus Z enthalten.

(d) Zeichnen der Mengen:

Menge S:

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0 \text{ und } x \leq y \text{ und } y \leq 1\}$$

Die Menge S beschreibt ein Gebiet im $\mathbb{R}^2$, das durch die Bedingungen $0 \leq x \leq y \leq 1$ eingeschränkt wird. Geometrisch ist das die Fläche eines Dreiecks im ersten Quadranten, mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 1)$.

Mengen A, $A^\complement$, B, C, $A \cap C$, $A \cup C$:

$$A := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|x\| \leq 1\}$$

Diese Menge beschreibt den Kreis mit Radius 1 um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$.

$$A^\complement := \mathbb{R}^2 \setminus A$$

Das Komplement von A besteht aus allen Punkten außerhalb dieses Kreises.

$$B := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$$

Diese Menge beschreibt den Rand des Kreises, also den Kreis selbst ohne das Innere.

$$C := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$$

Die Menge C beschreibt die rechte Hälfte der Ebene (alle Punkte, bei denen die erste Koordinate x_1 nicht negativ ist).

$$A \cap C$$

Der Schnitt von A und C ist die rechte Hälfte des Kreises mit Radius 1.

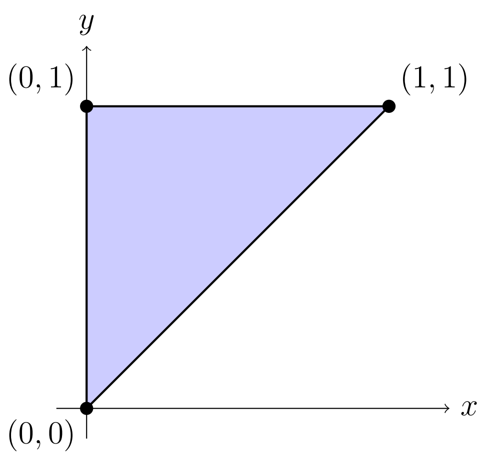
$$A \cup C$$

Die Vereinigung von A und C umfasst die gesamte rechte Hälfte der Ebene und den Rest des Kreises mit Radius 1.

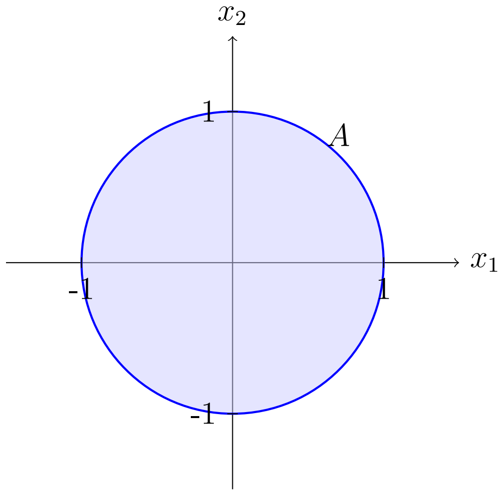
Graphische Darstellung: Die Mengen können als Flächen bzw. Kreise in einem Koordinatensystem gezeichnet werden.

Menge S

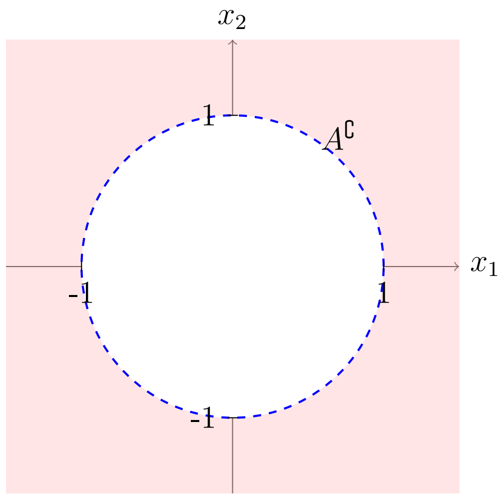
Die Menge S wird durch die Bedingungen $0 \leq x \leq y \leq 1$ beschrieben. Das resultierende Dreieck im ersten Quadranten ist:



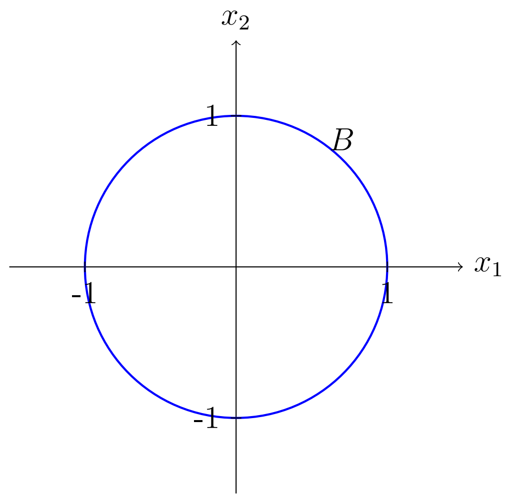
Menge A



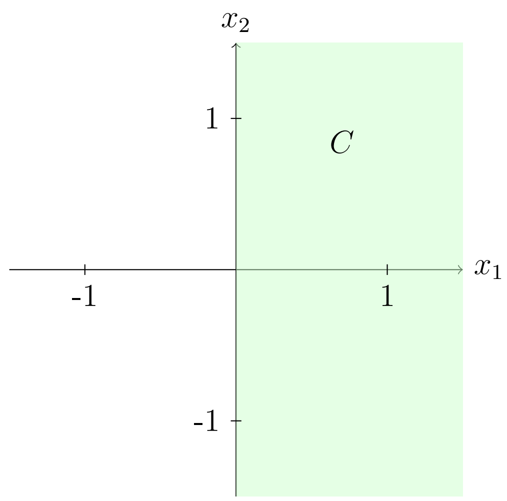
Menge $A^\complement$



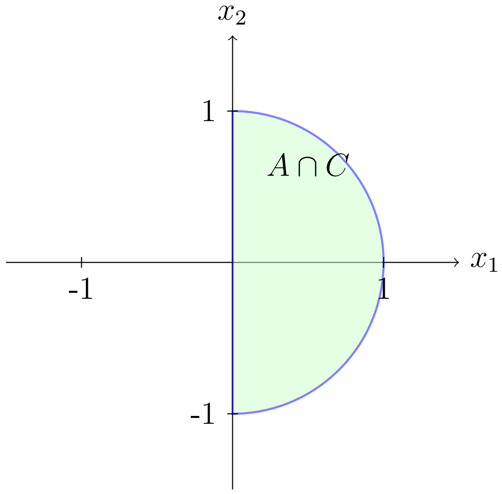
Menge B



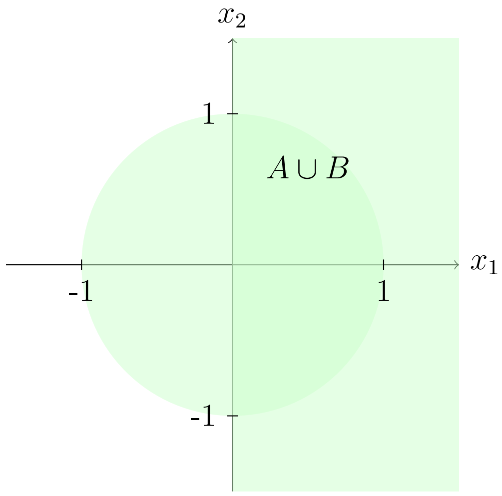
Menge C



Menge $A \cap C$



Menge $A \cup B$



2.2. Mengenoperationen Sei X eine Grundmenge.

(a) Sei $P(x)$ eine Aussageform für eine Variable $x \in X$. Überlegen Sie sich, dass gilt:

$$\left\{x \in X \,\middle|\, P(x)\right\}^{\complement} = \left\{x \in X \,\middle|\, \neg P(x)\right\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Beispiel $X := \{0, 1\}$, $P(x)$:="$x = 0$".

Seien jetzt $A, B \subseteq X$ Teilmengen.

(b) **(∗)** Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für die Mengen

$$(A \cap B)^{\complement}, \qquad A^{\complement} \cup B^{\complement}.$$

Überzeugen Sie sich durch Ihre Zeichnung, dass die beiden Mengen gleich sind.

(c) Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für die Mengen

$$(A \cup B)^{\complement}, \qquad A^{\complement} \cap B^{\complement}.$$

Überzeugen Sie sich durch Ihre Zeichnung, dass die beiden Mengen gleich sind.

(d) *Beweisen* Sie die de-morganschen Gesetze:

$$(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement},$$
$$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}.$$

Hinweis: Verwenden Sie (a) und die folgenden logischen Äquivalenzen (demorgansche Gesetze für Aussagen):

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q), \tag{2}$$
$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q). \tag{3}$$

(Siehe eine Aufgabe in Serie 1 (Wahrheitstafeln, logische Äquivalenz).) Seien jetzt A, B, C Mengen.

(e) Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für die Mengen

$$A \cap (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Überzeugen Sie sich durch Ihre Zeichnung, dass die beiden Mengen gleich sind.

(f) Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für die Mengen

$$A \cup (B \cap C), \qquad (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Überzeugen Sie sich durch Ihre Zeichnung, dass die beiden Mengen gleich sind.

(g) *Beweisen* Sie die Distributivgesetze für Mengen:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden logischen Äquivalenzen (Distributivgesetze für $\wedge$ und $\vee$):

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \tag{4}$$
$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R). \tag{5}$$

(Siehe eine Aufgabe in Serie 1 (Wahrheitstafeln, logische Äquivalenz).)

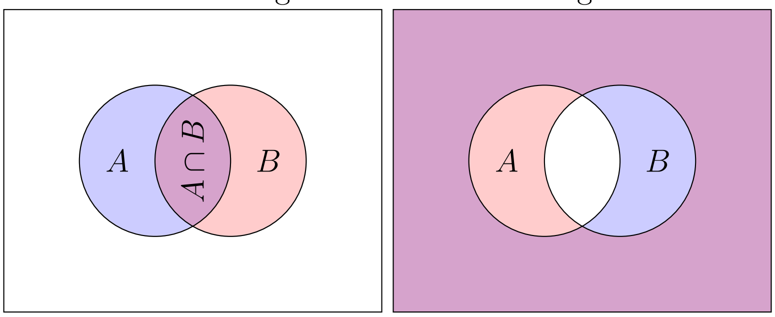
Lösung.

(a) Wir definieren $A = \{x \in X \mid P(x)\}$ und $B = \{x \in X \mid \neg P(x)\}$. Daraus folgt, dass

$$A \cup B = \{x \in X \mid P(x) \vee \neg P(x)\} = X$$
$$A \cap B = \{x \in X \mid P(x) \wedge \neg P(x)\} = \emptyset.$$

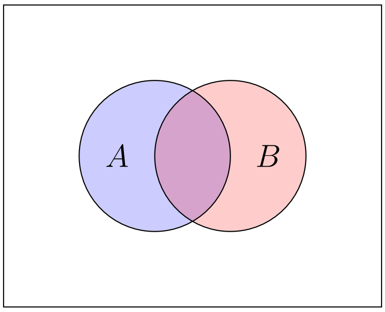
Wir folgern, dass $A^{\complement} = B$.

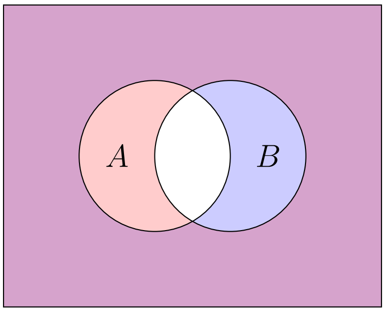
(b) Wir zeichnen die folgenden zwei Venn-Diagramme:



Links haben wir A blau und B rot eingefärbt. Die überlappende Region $A \cap B$ ist violett. Die Menge, die es zu zeichnen galt ist das Komplement von $A \cap B$, also alles was nicht violett ist. Im rechten Diagramm ist $A^{\complement}$ blau und $B^{\complement}$ rot. Die Region $A^{\complement} \cup B^{\complement}$ ist alles, was eingefärbt ist. Wir sehen also, dass $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$.

(c) Wir zeichnen wieder die folgenden zwei Venn-Diagramme:





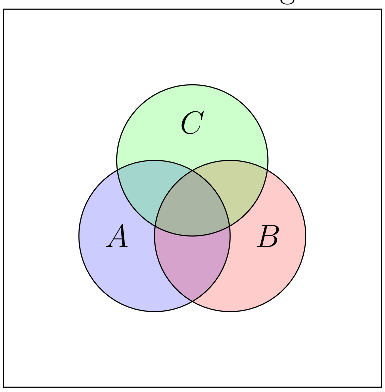
Links haben wir A blau und B rot eingefärbt. Die Vereinigung derbeiden Mengen ist alles, was farbig ist. Das Komplement davon alles was weiss geblieben ist. Im rechten Diagramm ist $A^\complement$ blau und $B^\complement$ rot. Die Schnittmenge davon ist violett. Wir sehen also, dass $(A \cup B)^\complement = A^\complement \cap B^\complement$.

(d)

$$\begin{aligned}
(A \cap B)^\complement &= \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}^\complement = \{x \in X \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} \\
&= \{x \in X \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} \\
&= \{x \in X \mid \neg(x \in A)\} \cup \{x \in X \mid \neg(x \in B)\} \\
&= A^\complement \cup B^\complement
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A \cup B)^\complement &= \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}^\complement = \{x \in X \mid \neg(x \in A \vee x \in B)\} \\
&= \{x \in X \mid \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\} \\
&= \{x \in X \mid \neg(x \in A)\} \cap \{x \in X \mid \neg(x \in B)\} \\
&= A^\complement \cap B^\complement
\end{aligned}$$

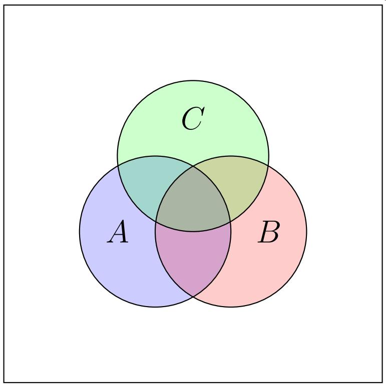
(e) Wir zeichnen das folgende Venn-Diagramm:



In diesem Venn-Diagramm ist die Menge A Rot, die Menge B Grün und die Menge C Blau eingefärbt. Die Menge $B \cup C$ ist demnach alles, was nicht Weiss oder Rot ist. Wird diese Menge mit A geschnitten, bleiben der Graue, der

Violette und der Gelbe Teil übrig.
Für die zweite Menge berechnen wir zuerst $A \cap B$ und $A \cap C$. $A \cap B$ ist alles, was Gelb oder Grau ist. $A \cap C$ alles, was Violett oder Grau ist. Die Vereinigung dieser beiden Mengen ist dann alles, was Grau, Violett oder Gelb ist. Wir sehen also, dass $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(f) Wir zeichnen wieder das folgende Venn-Diagramm:



In diesem Venn-Diagramm ist die Menge A Rot, die Menge B Grün und die Menge C Blau eingefärbt. Die Menge $B \cap C$ ist demnach alles, was Türkis oder Grau ist. Dies Vereinigt mit A resultiert in einer Menge, die alles beinhaltet, ausser Weiss, Grün und Blau.
Für die zweite Menge berechnen wir zuerst $A \cup B$ und $A \cup C$. $A \cup B$ ist alles, was nicht Blau oder Weiss ist. $A \cup C$ widerum ist alles, was nicht Grün oder Weiss ist. Die Schnittmenge davon gibt demnach alles was nicht Weiss, Grün oder Blau ist. Wir sehen also, dass $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(g)

$$
\begin{aligned}
&A \cap (B \cup C) \\
&= \{x \in X \mid x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \\
&= \{x \in X \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} \\
&= \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\} \cup \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in C\} \\
&= (\{x \in X \mid x \in A\} \cap \{x \in X \mid x \in B\}) \cup (\{x \in X \mid x \in A\} \cap \{x \in X \mid x \in C\}) \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&A \cup (B \cap C) \\
&= \{x \in X \mid x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\} \\
&= \{x \in X \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\} \\
&= \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\} \cap \{x \in X \mid x \in A \vee x \in C\} \\
&= (\{x \in X \mid x \in A\} \cup \{x \in X \mid x \in B\}) \cap (\{x \in X \mid x \in A\} \cup \{x \in X \mid x \in C\}) \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

2.3. Quantoren

(a) Was bedeutet jede der folgenden Aussage? Ist sie wahr?

1) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \leq 1 \vee n > 1$

2) $\forall x \in \mathbb{N}_0 : x \leq 1 \vee x > 1$

3) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : x \neq \frac{p}{q}$

(b) Schreiben Sie die folgenden Aussagen mittels Quantoren.

1) 24 ist keine Quadratzahl.

2) **(∗)** Zu jeder reellen Zahl gibt es eine natürliche Zahl, die grösser als die gegebene Zahl ist.

Bemerkungen:

- 1) und 2) sind wahr.
- 2) ist das *archimedische Prinzip*.

Lösung.

(a) 1) "Jede natürliche Zahl ist kleiner gleich eins oder grösser als eins." Diese Aussage ist wahr.

2) Diese Aussage stimmt mit 1) überein, ausser, dass die Variable jetzt x statt n heisst. 2) ist daher äquivalent zu 1) gemäss dem Goethe-Prinzip *Name ist Schall und Rauch*. 2) ist deshalb wahr.

3) Es existiert eine reelle Zahl, die keine rationale Zahl ist.[1] Diese Aussage ist wahr.

(b) a) $\nexists n \in \mathbb{N}_0 : n^2 = 24.$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}_0 : n > x$

[1] Eine solche Zahl heisst *irrational*.

2.4. Quantoren und Negation Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie wahr ist. Formulieren Sie ihre Verneinung mittels Quantoren so um, dass darin keine Negation $\neg$ mehr vorkommt. Schreiben Sie die verneinte Aussage in Wörtern ohne mathematische Zeichen auf.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n < n^2$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \leq 1 \vee n > 1$

(c) **(∗)** $\forall x \in (0, \infty) \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

(d) P:="$\exists n \in \mathbb{N}\, \forall x \in (0, \infty) : \frac{1}{n} < x$"

Lösung.

(a) Negation:

$\exists n \in \mathbb{N}_0 : \neg(n < n^2)$, d. h. $\exists n \in \mathbb{N}_0 : n \geq n^2$

="Es existiert eine natürliche Zahl, die grösser oder gleich ihr Quadrat ist."

Das ist wahr, da für $n = 0$ gilt $0 \geq 0^2$. Die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n < n^2$ ist daher falsch.

(b) Die Aussage ist wahr. Negation:

$\exists n \in \mathbb{N}_0 : \neg\Big(n \leq 1 \vee n > 1\Big)$, d. h. $\exists n \in \mathbb{N}_0 : n > 1 \wedge n \leq 1$

="Es gibt eine natürliche Zahl, die grösser als eins und kleiner gleich eins ist."

(c) Die Aussage ist wahr. (Das folgt aus dem archimedischen Prinzip. Siehe Aufgabe 2.3.) Negation:

$$
\begin{aligned}
\neg\left(\forall x \in (0,\infty) \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x\right) &\Leftrightarrow \exists x \in (0,\infty) \neg\left(\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x\right) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in (0,\infty) \forall n \in \mathbb{N} \neg \frac{1}{n} < x \\
&\Leftrightarrow \exists x \in (0,\infty) \forall n \in \mathbb{N}\, \frac{1}{n} \geq x
\end{aligned}
$$

="Es gibt eine positive reelle Zahl, die kleiner oder gleich der Kehrwert jeder von null verschiedenen natürlichen Zahl ist."

(d) Negation:

$$\begin{aligned}\neg P = \neg\left(\exists n \in \mathbb{N}\, \forall x \in (0,\infty) : \frac{1}{n} < x\right) \\ \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \neg \left(\forall x \in (0,\infty) : \frac{1}{n} < x\right) \\ \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \exists x \in (0,\infty) : \neg \frac{1}{n} < x \\ \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \exists x \in (0,\infty) : \frac{1}{n} \geq x\end{aligned}$$

="Zu jeder von null verschiedenen natürlichen Zahl gibt es eine positive reelle Zahl, die kleiner oder gleich der Kehrwert der natürlichen Zahl ist."

$\neg P$ ist wahr. Um das zu sehen, betrachten wir zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $x := \frac{1}{n}$. Es folgt, dass P falsch ist.

2.5. Funktion Zeichnen Sie jedes der folgenden Tripel $f := (X, Y, G)$. Überprüfen Sie, ob es eine Funktion ist. (Ihre Zeichnung kann Ihnen dabei helfen.)

(a) $X := \mathbb{R}$, $Y := \mathbb{R}$, $G := \left\{(x, e^x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$, $f := (X, Y, G)$

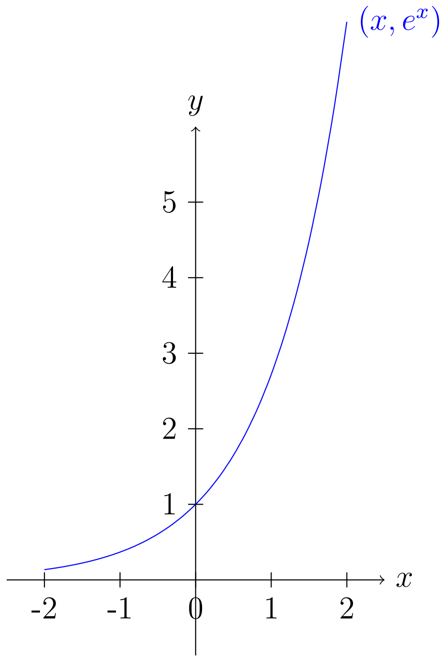
(b) $X := \mathbb{R}$, $Y := \mathbb{R}$, $G := \left\{(y^2, y) \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\}$, $f := (X, Y, G)$

(c) $X := [0, \infty)$, $Y := \mathbb{R}$, $G := \left\{(y^2, y) \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\}$, $f := (X, Y, G)$

(d) **(∗)** $X := [0, \infty)$, $Y := \mathbb{R}$, $G := \left\{(y^2, y) \,\middle|\, y \in [0, \infty)\right\}$, $f := (X, Y, G)$

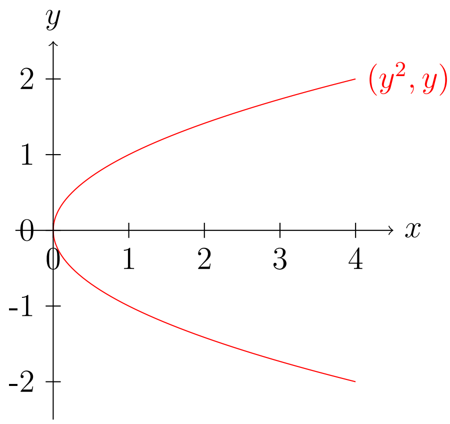
Lösung.

(a) **Zeichnung:**



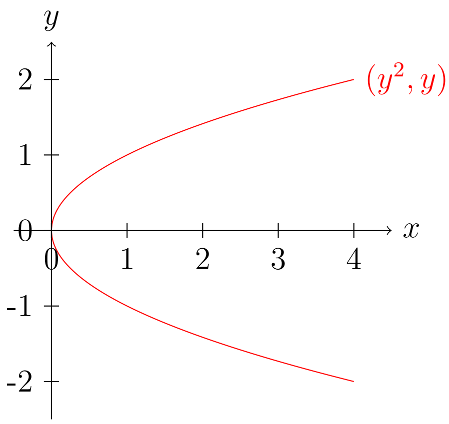
Überprüfung: Für jedes $x \in X = \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in Y = \mathbb{R}$, sodass $(x, y) \in G$, nämlich $y = e^x$. Daher ist f eine Funktion.

(b) Zeichnung:



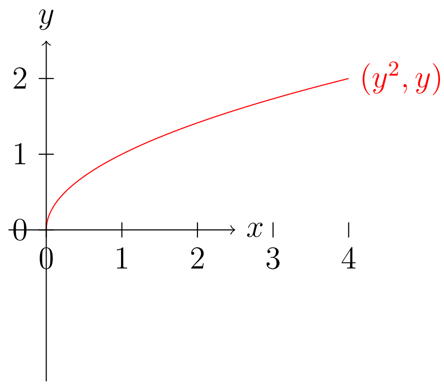
Überprüfung: Für $x = -1 \in X = \mathbb{R}$ gibt es kein $y \in Y = \mathbb{R}$, sodass $(x, y) \in G$. (Warum?) Daher ist f keine Funktion.

(c) Zeichnung:



Überprüfung: Wir betrachten $x = 1 \in X = \mathbb{R}$. Es gilt sowohl $(x, 1) \in G$ als auch $(x, -1) \in G$. Daher ist das $y \in Y = \mathbb{R}$, wofür $(x, y) \in G$, nicht eindeutig. Deshalb ist f keine Funktion.

(d) **($*$) Zeichnung:**



Überprüfung: Für jedes $x \in X = [0, \infty)$ gibt es genau ein $y \in Y = \mathbb{R}$, sodass $(x, y) \in G$, nämlich $y = \sqrt{x}$. Daher ist f eine Funktion.

2.6. Bild, Urbild

(a) Bestimmen Sie das Bild jeder der folgenden Funktionen:

$$
\begin{array}{lll}
 & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f(x) := x^2 \\
 & g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & g(x) := x^3 \\
(*) & h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & h(x) := e^x
\end{array}
$$

Tipps für f:

- Zeichnen Sie f.

- Stellen Sie mit Hilfe Ihrer Zeichnung eine Vermutung darüber auf, welche Menge S gleich dem Bild $\mathrm{im}(f)$ ist.
- Beweisen Sie Ihre Vermutung, indem Sie zeigen, dass $\mathrm{im}(f) \subseteq S$ und $S \subseteq \mathrm{im}(f)$.

  Tipps für $S \subseteq \mathrm{im}(f)$:

  - Verwenden Sie den Zwischenwertsatz[2]:

    Seien $a < b$ reelle Zahlen, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass $f(a) \leq f(b)$, und $y \in \big[f(a), f(b)\big]$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$, sodass $f(x) = y$.

  - Falls $y \geq 1$, dann ist $y \in \big[f(0), f(y)\big]$.

Tipp für g: Verwenden Sie ein ähnliches Argument.

Tipp für h: Verwenden Sie ein ähnliches Argument sowie die Ungleichheit

$$y \leq h(y), \forall y \in [0, \infty).$$

Betrachten $h((-\infty, 0))$ und $h([0, \infty))$ separat.

(b) Wir schreiben $(a, b) =]a, b[$ für das offene Intervall von a bis b. Bestimmen Sie für die obigen Funktionen die folgenden Urbilder:

$$(*) \qquad \begin{aligned} &f^{-1}((-1, 4)), \\ &g^{-1}([-8, -1]), \\ &h^{-1}([-1, 1]) \end{aligned}$$

Lösung.

(a) Bild der Funktionen:

Behauptung: Es gilt

$$\mathrm{im}(f) = [0, \infty).$$

Beweis: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$. Daher gilt $\mathrm{im}(f) \subseteq S := [0, \infty)$.

Wir zeigen die umgekehrte Inklusion $[0, \infty) \subseteq \mathrm{im}(f)$: Sei $y \in [0, \infty)$. Wir definieren $z := \max\{y, 1\} :=$ das Maximum von y und 1. Es gilt

$$f(0) = 0 \leq y \leq z \leq z^2 = f(z), \qquad \text{d. h.} \qquad y \in [f(0), f(z)].$$

[2]Dieser Satz wird später in der Vorlesung behandelt.

Da f stetig ist, folgt darum aus dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x \in [0, z]$ gibt, sodass $f(x) = y$. Da $[0, z] \subseteq \mathbb{R}$, folgt, dass $y \in f(\mathbb{R}) = \mathrm{im}(f)$. Daher gilt die Inklusion $[0, \infty) \subseteq \mathrm{im}(f)$.

Da auch $\mathrm{im}(f) \subseteq [0, \infty)$ gilt, folgt daraus, dass $\mathrm{im}(f) = [0, \infty)$. Das beweist die Behauptung. $\square$

Ein ähnliches Argument zeigt, dass

$$\mathrm{im}(g) = \mathbb{R}.$$

(Überprüfen Sie das! Beweisen Sie $\mathbb{R} \subseteq \mathrm{im}(g)$, indem Sie $[0, \infty) \subseteq g([0, \infty))$ und $(-\infty, 0] \subseteq g((-\infty, 0])$ zeigen.)

Behauptung: Es gilt

$$\mathrm{im}(h) = (0, \infty).$$

Beweis: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $h(x) = e^x > 0$. Daher gilt $\mathrm{im}(h) \subseteq (0, \infty)$.

Wir zeigen die umgekehrte Inklusion $(0, \infty) \subseteq \mathrm{im}(h)$: Sei $y \in (0, \infty)$.

Fall $y \geq 1$: Gemäss dem Tipp gilt $y \leq e^y = h(y)$, also $y \in \Big[h(0) = 1, h(y)\Big]$. Da h stetig ist, folgt darum aus dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x \in [0, y] \subseteq \mathbb{R}$ gibt, sodass $h(x) = y$. Daraus folgt, dass $y \in h(\mathbb{R}) = \mathrm{im}(h)$.

Fall $y < 1$: Dann gilt

$$\widetilde{y} := \frac{1}{y} > 1.$$

Wie wir soeben gezeigt haben, gibt es daher ein $\widetilde{x} \in \mathbb{R}$, sodass $h(\widetilde{x}) = e^{\widetilde{x}} = \widetilde{y}$. Wir definieren $x := -\widetilde{x}$. Wir haben

$$h(x) = e^{-\widetilde{x}} = \frac{1}{e^{\widetilde{x}}} = \frac{1}{\widetilde{y}} = y.$$

Daraus folgt, dass $y \in h(\mathbb{R}) = \mathrm{im}(h)$.

Also gilt die Inklusion $(0, \infty) \subseteq \mathrm{im}(h)$. Da auch $\mathrm{im}(h) \subseteq (0, \infty)$, folgt daraus, dass $\mathrm{im}(h) = (0, \infty)$. Das beweist die Behauptung. $\square$

(b) Urbilder der Funktionen: Behauptung: Es gilt $f^{-1}((-1, 4)) = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in (-1, 4)\Big\} = (-2, 2)$.

Beweis: Für jedes $x \in (-2, 2)$ gilt $-1 < 0 \leq f(x) = x^2 < 4$, also $f(x) \in (-1, 4)$. Daher gilt $(-2, 2) \subseteq f^{-1}((-1, 4))$.

Wir zeigen die umgekehrte Inklusion $f^{-1}((-1,4)) \subseteq (-2,2)$: Sei $x \in f^{-1}((-1,4))$, d. h. $x^2 = f(x) \in (-1,4)$, d. h.$-1 < x^2 < 4$.

Fall $x \geq 0$: Da $x^2 < 4$, zeigt in Argument wie im Beweis des Satzes "$\sqrt{2} < \sqrt{3}$", dass $x = \sqrt{x^2} < \sqrt{4} = 2$, also $x \in [0,2) \subseteq (-2,2)$.

Fall $x < 0$: Ein analoges Argument zeigt, dass $x \in (-2,0] \subseteq (-2,2)$.

Daher gilt in jedem Fall, dass $x \in (-2,2)$. Daher gilt die Inklusion $f^{-1}((-1,4)) \subseteq (-2,2)$.

Da auch $(-2,2) \subseteq f^{-1}((-1,4))$ gilt, folgt daraus, dass $(-2,2) = f^{-1}((-1,4))$. Das beweist die Behauptung. $\square$

Ähnliche Argumente zeigen, dass

$$\begin{aligned} g^{-1}([-8,-1]) &= \Big\{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq g(x) = x^3 \leq -1\Big\} = [-2,-1] \\ h^{-1}([-1,1]) &= \Big\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq h(x) = e^x \leq 1\Big\} = (-\infty, 0] \end{aligned}$$

2.7. Injektivität, Surjektivität, Bijektivität Zeigen Sie Folgendes:

(a) Wir definieren $X := \mathbb{N}_0$, $Y := \Big\{m \in \mathbb{N}_0 \,\Big|\, m \text{ ist gerade}\Big\}$ und $f : X \to Y$, $f(n) := 2n$. Diese Funktion ist bijektiv.

(b) Die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, ist injektiv und nicht surjektiv.

(c) Wir definieren $X := \mathbb{R}$, $Y := [0,\infty)$, $f : X \to Y$, $f(x) := x^2$. Diese Funktion ist nicht injektiv, aber surjektiv.

(d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv.

(e) **($*$)** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2x + 1$, ist bijektiv.

(f) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) := e^{2x}$, ist bijektiv.

Lösung.

(a) Injektivität: Seien $n, n' \in X = \mathbb{N}_0$, sodass $f(n) = f(n')$, d. h. $2n = 2n'$. Dann gilt $n = n'$. Daher ist f injektiv.

Surjektivität: Sei $m \in Y$, d. h. $m \in \mathbb{N}_0$ und m ist gerade. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0 = X$, sodass $m = 2n = f(n)$. Daher ist f surjektiv.

Da die Funktion f injektiv und surjektiv ist, ist sie bijektiv.

(b) Die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, ist injektiv, da $f(x_1) = f(x_2)$ nur für $x_1 = x_2$ gilt. Sie ist jedoch nicht surjektiv, da z.B. kein $x \in [0,\infty)$ existiert, sodass $f(x) = -1$.

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, definiert durch $f(x) = x^2$, ist nicht injektiv, da $f(x_1) = f(x_2)$ für $x_1 = -x_2$ (z.B. $f(1) = f(-1) = 1$). Sie ist jedoch surjektiv, da das Bild von f gleich $[0,\infty)$ ist. (Siehe Aufgabe 2.6(a).)

Bemerkung: Die Wurzelfunktion $\sqrt{\ } : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ist definiert als die Umkehrfunktion der Funktion $\widetilde{f} : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\widetilde{f}(x) := x^2$. (f und $\widetilde{f}$ unterscheiden sich durch ihren Definitionsbereich. Für jedes $y \in [0,\infty)$ gilt für $x = \pm\sqrt{y}$, dass $f(x) = (\pm\sqrt{y})^2 = y$.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass die Wurzelfunktion wohldefiniert ist, müssen wir unter anderem zeigen, dass $\widetilde{f}$ surjektiv ist. Dazu können wir die Wurzelfunktion nicht verwenden, da wir sonst einen Zirkelschluss erhielten. Wir können daher im Beweis, dass f surjektiv ist, nicht einfach sagen: “Nimm $x := \sqrt{y}$.”

(d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv. Sie ist nicht injektiv, da $f(x_1) = f(x_2)$ für $x_1 = -x_2$. Außerdem ist sie nicht surjektiv, da es kein $x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) = -1$.

(e) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 2x + 1$, ist injektiv, da $f(x_1) = f(x_2)$ nur für $x_1 = x_2$ gilt. Sie ist auch surjektiv, da für jedes $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ existiert (nämlich $x = \frac{y-1}{2}$), sodass $f(x) = y$. Somit ist f bijektiv.

(f) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, definiert durch $f(x) = e^{2x}$, ist injektiv, da sie streng monoton wachsend ist (die Ableitung $f'(x) = 2e^{2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Sie ist auch surjektiv, da das Bild von f gleich $(0,\infty)$ ist. (Das folgt aus Aufgabe 2.6(a).) Somit ist f bijektiv.

Bemerkung: Der (natürliche) Logarithmus $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert als die Umkehrfunktion der (natürlichen) Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$. Für jedes $y \in (0,\infty)$ gilt für $x = \frac{\log(y)}{2}$, dass $f(x) = e^{2\frac{\log(y)}{2}} = y$.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass der Logarithmus wohldefiniert ist, müssen wir unter anderem zeigen, dass exp surjektiv ist. Dazu können wir den Logarithmus nicht verwenden, da wir sonst einen Zirkelschluss erhielten. Wir können daher im Beweis, dass f surjektiv ist, nicht einfach sagen: “Nimm $x := \frac{\log(y)}{2}$.”

2.8. Umkehrfunktion Für f gegeben durch (a), **(∗)** (e),(f) bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} = f^{\langle -1 \rangle}$.

Lösung.

(a) Für die Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to Y$, $f(n) = 2n$ (siehe (a)):

$$f^{-1}(m) = \frac{m}{2} \quad \text{für } m \in Y.$$

(b) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ (siehe **(∗)** (e)):

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2} \quad \text{für } y \in \mathbb{R}.$$

(c) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = e^{2x}$ (siehe (f)):

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\log(y) \quad \text{für } y > 0.$$

2.9. Verknüpfung von Funktionen

(a) **(∗)** Wir betrachten die Funktionen

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2, \qquad g(y) := e^y.$$

Bestimmen Sie die verknüpften Funktionen

$$g \circ f, \qquad f \circ g.$$

(b) Wir bezeichnen mit $\|\|$ die euklidische Norm. (Siehe (1).) Wir betrachten die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) := \|x\|, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(y) := e^y.$$

Wir kürzen ab $f(x_1, x_2) := f((x_1, x_2))$, für $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie

$$g \circ f, \qquad g \circ f(1, 2).$$

Ist die Verknüpfung $f \circ g$ wohldefiniert (d. h. sinnvoll)?

Lösung.

(a) Für die Funktionen f und g haben wir:

$$f(x) = x^2, \quad g(y) = e^y.$$

Die verknüpfte Funktion $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ergibt sich zu:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = e^{(x^2)} =: e^{x^2}.$$

Die verknüpfte Funktion $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ergibt sich zu:

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(e^y) = (e^y)^2 = e^{2y}.$$

(b) Wir haben die Funktionen:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) := \|(x_1, x_2)\|, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(y) := e^y.$$

Die euklidische Norm ist gegeben durch:

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Somit ist die verknüpfte Funktion $g \circ f$:

$$g \circ f(x_1, x_2) = g(f(x_1, x_2)) = g(\|(x_1, x_2)\|) = g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = e^{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}.$$

Für $g \circ f(1, 2)$ erhalten wir:

$$g \circ f(1, 2) = e^{\sqrt{1^2+2^2}} = e^{\sqrt{1+4}} = e^{\sqrt{5}}.$$

Die Verknüpfung $f \circ g$ ist nicht wohldefiniert, da g einen Skalarwert ausgibt und f jedoch einen Vektor aus $\mathbb{R}^2$ erwartet. Daher ist $f \circ g$ nicht sinnvoll.

2.10. Urbild, Bild und Mengenoperationen Seien X und Y Mengen und $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$ Teilmengen.

(a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \\ f(A_1 \cup A_2) &= f(A_1) \cup f(A_2) \end{aligned}$$

(b) Geben Sie ein Beispiel von f, A_1 und A_2, so, dass

$$f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2).$$

Lösung.

(a) Definitionsgemäss gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) \in B_1 \text{ oder } f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(B_1) \text{ oder } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

Definitionsgemäss gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ und } B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ und } f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

Gemäss Definition gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : f(x) = y \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A_1 : f(x) = y) \text{ oder } (\exists x \in A_2 : f(x) = y) \\ &\Leftrightarrow (y \in f(A_1)) \text{ oder } (y \in f(A_2)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{aligned}$$

Daher folgt die erste Aussage.

(b) Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \{1,2\} \to \{1\}, \quad f(1) = 1,\, f(2) = 1.$$

Wir nehmen $A_1 = \{1\}$ und $A_2 = \{2\}$. Dann gilt

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\}$$

Da das Bild der leeren Menge leer ist, haben wir das gewünschte Gegenbeispiel gefunden.

2.11. Supremum und Infimum

- Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum jeder der folgenden Mengen.
- Bestimmen Sie, ob die Menge ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

1.) **(∗)** $A := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

2.) $B := \left\{ \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in (1,2] \right\}$.

3.) $C := \left\{ \frac{x}{x+1} \,\middle|\, x \in [2,\infty) \right\}$.

Lösung.

1.) Es gilt $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$ und deswegen

- $\inf A = 0$
- $\sup A = 1$

Die Menge A besitzt kein Minimum, da $\inf A = 0 \notin A$.

Sie besitzt ein Maximum, da $\sup A = 1 \in A$.

2.) Es gilt $B = \left\{ \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in (1,2] \right\} = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ und deswegen

- $\inf B = \dfrac{1}{2}$
- $\sup B = 1$

Die Menge B besitzt ein Minimum, da $\inf B = \frac{1}{2} \in B$.

Sie besitzt kein Maximum, da $\sup B = 1 \notin B$.

3.) Es gilt $C = \left\{ \frac{x}{x+1} \,\middle|\, x \in [2,\infty) \right\} = \left[\frac{2}{3}, 1\right)$ und deswegen

- $\inf C = \dfrac{2}{3}$
- $\sup C = 1$

Die Menge C besitzt ein Minimum, da $\inf C = \frac{2}{3} \in C$.

Sie besitzt kein Maximum, da $\sup C = 1 \notin C$.

2.12. Online-MC Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online über Moodle, siehe Vorlesungswebseite.

Es ist bei jeder Aufgabe möglich, dass keine oder mehrere Antworten richtig sind.

(a) Wählen Sie die richtige Aussagen.

(i) Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Sei $B \subset Y$ eine Teilmenge. Dann gilt $f(f^{-1}(B)) = B$.

(ii) Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann gilt $f^{-1}(f(A)) = A$.

(b) Die Ungleichung $||x-2|-1| < 3$ für reelle Zahlen x ist äquivalent zu

(i) $x < 3$

(ii) $|x| < 3$

(iii) $0 < x < 2$

(iv) $-2 < x < 6$

(v) $-3 < x < 6$

(c) Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen, so dass gilt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(i) f ist injektiv,

(ii) f ist surjektiv,

(iii) g ist injektiv,

(iv) g ist surjektiv,

(v) $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(d) Eine reelle Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = h(x)$$

gilt, und sie heisst *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = -h(x)$$

gilt. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) fg ist gerade.

(ii) fg ist ungerade.

(iii) fg^2 ist gerade.

(iv) $f + g$ ist gerade.

(e) Die Umkehrfunktion (Inverse) von $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) := x^4$ ist

(i) $x^{\frac{1}{4}}$.

(ii) existiert nicht.

(iii) $\frac{1}{4}x$.

(iv) x^{-4}.

(v) $-x^4$.

(f) Seien A und B zwei Teilmengen von $\mathbb{R}$. Was ist die Negation der folgenden Aussage?

$$\forall a \in A, \exists b \in B, \text{ so dass } a \leq b$$

(i) $\forall a \in A, \forall b \in B \; a \leq b$.

(ii) $\forall a \in A \; \exists b \in B$ so dass $a > b$.

(iii) $\exists b \in B$ so dass $\forall a \in A \; a \leq b$.

(iv) $\exists a \in A$ so dass $\forall b \in B \; a > b$.

(v) $\exists a \in A, \; \exists b \in B$ so dass $a > b$.

Lösung.

(a)

(b) (iv);

(c) (i), (iv);

(d) (ii), (iii);

(e) (ii);

(f) (iv).