Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

3.1. Element, Teilmenge Wir definieren die natürlichen Zahlen als

$$0 := \emptyset, \qquad 1 := \{0\}, \qquad 2 := \{0, 1\}, \qquad 3 := \{0, 1, 2\}, \qquad \ldots$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $1 \in \{1\}$

(b) $1 \subseteq \{1\}$

(c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(d) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

(e) Für jede Menge X gilt $\emptyset \subseteq X$.

Lösung.

(a) **Wahr.**

(b) **Falsch.** Grund: Die Menge 1 enthält das Element 0. Die Menge $\{1\}$ enthält das Element 0 nicht. Daher ist 1 keine Teilmenge von $\{1\}$.

(c) **Wahr.**

(d) **Wahr.** Die Aussage folgt aus (e).

(e) **Wahr.** Grund: Jedes Element $x \in \emptyset$ ist ein Element von X, da es kein solches x gibt.

3.2. reelle Zahl, Dedekind-Schnitt In dieser Aufgabe verwenden wir die Notationen aus der Vorlesung. Für jede rationale Zahl r bezeichnet $\mathbf{r}$ zum Beispiel die reelle Zahl (d. h. den Dedekind-Schnitt)

$$\mathbf{r} := \left\{ s \in \mathbb{Q} \,\middle|\, s > r \right\} \in \mathbb{R}.$$

(a) **(∗)** Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{1} + \mathbf{2} = \mathbf{3}. \tag{1}$$

Tipps:

- Zeigen Sie, dass in (1) die Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ gelten.

- Um $\supseteq$ zu zeigen, betrachten Sie zu gegebenem rationalem $t > 3$ die rationalen Zahlen
$$r := 1 + \frac{t-3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2}, \qquad s := 2 + \frac{t-3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{t}{2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass
$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}. \tag{2}$$

Tipps:

- Zeigen Sie, dass in (2) die Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ gelten.
- Um $\supseteq$ zu zeigen, betrachten Sie zu gegebenem rationalem $t \in \mathbf{1}$ die rationalen Zahlen
$$r := \frac{t+1}{2}, \qquad s := \frac{t}{r}.$$
Zeigen Sie, dass $r, s \in \mathbf{1}$. Folgern Sie, dass in (2) die Inklusion $\supseteq$ gilt.

(c) Wir definieren
$$\sqrt{\mathbf{2}} := \left\{ r \in \mathbb{Q} \,\middle|\, r \geq 0,\, r^2 > 2 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\sqrt{\mathbf{2}}$ eine reelle Zahl ist, d. h. ein Dedekind-Schnitt.

Tipp: Die letzte Bedingung in der Definition eines Dedekind-Schnittes x besagt, dass
$$\forall r \in x \exists s_0 \in x : s_0 < r.$$

Zu gegebenem $r \in x$ betrachten Sie $s_0 := \dfrac{2r+2}{r+2}$.

Lösung.

(a) Beweis von (1)**:**

- $\mathbf{1} + \mathbf{2} \subseteq \mathbf{3}$: Sei $t \in \mathbf{1} + \mathbf{2}$. Das bedeutet, dass es $r \in \mathbf{1}$ und $s \in \mathbf{2}$ gibt mit $t = r + s$. Da $r > 1$ und $s > 2$, folgt $t = r + s > 3$, also $t \in \mathbf{3}$. Damit ist die Inklusion $\subseteq$ gezeigt.
- $\mathbf{3} \subseteq \mathbf{1} + \mathbf{2}$: Sei $t > 3$ und definiere $r := 1 + \frac{t-3}{2}$ und $s := 2 + \frac{t-3}{2}$. Dann gilt $r > 1$, $s > 2$ und $t = r + s$. Also $t \in \mathbf{1} + \mathbf{2}$, womit die Inklusion $\mathbf{3} \subseteq \mathbf{1} + \mathbf{2}$ gezeigt ist.

Damit gilt $\mathbf{1}+\mathbf{2}=\mathbf{3}$.

Bemerkung: Allgemein gilt für alle $r_0, s_0 \in \mathbb{Q}$, dass

$$\mathbf{r_0}+\mathbf{s_0} = \text{ (Box von } r_0+s_0\text{) } := \left\{t \in \mathbb{Q} \,\middle|\, t > r_0+s_0\right\}.$$

Das folgt aus einem Argument wie dem obigen. Für die Inklusion "$\supseteq$" betrachten wir zu einem gegebenen $t \in$ (Box von r_0+s_0) die Zahlen

$$r := r_0 + \frac{t-(r_0+s_0)}{2}, \qquad s := s_0 + \frac{t-(r_0+s_0)}{2}.$$

Im Fall $r_0, s_0 > 0$ können wir alternativ die Zahlen

$$r := \frac{r_0}{r_0+s_0}t, \qquad s := \frac{s_0}{r_0+s_0}t$$

betrachten. Im obigen Fall $r_0 := 1$, $s_0 := 2$ können wir für den Beweis der Inklusion $\mathbf{3} \subseteq \mathbf{1}+\mathbf{2}$ zu gegebenem $t > 3$ also alternativ die Zahlen

$$r := \frac{t}{3}, \qquad s := \frac{2t}{3}$$

betrachten.

(b) Beweis von (2)**:**

- $\mathbf{1} \bullet \mathbf{1} \subseteq \mathbf{1}$: Sei $t \in \mathbf{1} \bullet \mathbf{1}$. Das bedeutet, dass es $r, s \in \mathbf{1}$ gibt mit $t = r \cdot s$. Da $r > 1$ und $s > 1$, folgt $t = r \cdot s > 1$, also $t \in \mathbf{1}$. Damit ist die Inklusion $\subseteq$ gezeigt.
- **Beweis der Inklusion** $\mathbf{1} \subseteq \mathbf{1} \bullet \mathbf{1}$: Sei $t \in \mathbf{1}$. Wir setzen

  $$r := \frac{t+1}{2}, \qquad s := \frac{t}{r}.$$

  Es gilt $t > 1$, deshalb $t+1 > 2$, also $r > 1$ und darum $r \in \mathbf{1}$. Es gilt $2t > t+1$, darum $s = \frac{2t}{t+1} > 1$ und deshalb $s \in \mathbf{1}$. Da $t = rs$, folgt, dass $t \in \mathbf{1} \bullet \mathbf{1}$. Das zeigt die Inklusion $\mathbf{1} \subseteq \mathbf{1} \bullet \mathbf{1}$.

(c) Beweis, dass $\sqrt{\mathbf{2}}$ ein Dedekind-Schnitt ist:

- $\sqrt{\mathbf{2}} \neq \emptyset$: Die Zahl $r := 2$ erfüllt $r \in \mathbb{Q}$, $r \geq 0$ und $r^2 = 4 > 2$. Daher gilt $r \in \sqrt{\mathbf{2}}$. Daraus folgt, dass $\sqrt{\mathbf{2}} \neq \emptyset$.
- $\sqrt{\mathbf{2}} \neq \mathbb{Q}$: Die Zahl $r := 1$ erfüllt $r \in \mathbb{Q}$, $r^2 = 1 \not> 2$ und daher $r \notin \sqrt{\mathbf{2}}$. Daraus folgt, dass $\sqrt{\mathbf{2}} \neq \mathbb{Q}$.

- $\forall r \in x := \sqrt{\mathbf{2}}\, \forall s \in \mathbb{Q} : s > r \Rightarrow s \in x$: Sei $r \in \sqrt{\mathbf{2}}$ und $s \in \mathbb{Q}$ so, dass $s > r$. Da $r \geq 0$, gilt $s \geq 0$. Des Weiteren gilt $s^2 > r^2 > 2$. Es folgt, dass $s \in \sqrt{\mathbf{2}}$.

- Wir zeigen, dass
$$\forall r \in x := \sqrt{\mathbf{2}}\, \exists s_0 \in x : \ s_0 < r. \tag{3}$$
Sei $r \in \sqrt{\mathbf{2}}$. Wir definieren $s_0 := \frac{2r+2}{r+2}$. Da $r \geq 0$, gilt
$$s_0 \geq 0. \tag{4}$$
Es gilt
$$\begin{aligned}(2r+2)^2 &= 4r^2 + 8r + 4 \\ &> 2\Big(r^2 + 4r + 4\Big) \qquad (\text{da } r^2 > 2) \\ &= 2(r+2)^2\end{aligned}$$
und daher
$$s_0^2 = \left(\frac{2r+2}{r+2}\right)^2 > 2. \tag{5}$$
Da $r^2 > 2$, gilt $r(r+2) > 2r+2$ und daher
$$r > \frac{2r+2}{r+2} = s_0. \tag{6}$$
Wegen (4,5,6) hat s_0 die gewünschten Eigenschaften, d. h. die Bedingung (3) ist erfüllt.

Somit ist $\sqrt{\mathbf{2}}$ ein Dedekind-Schnitt, d. h. eine reelle Zahl.

3.3. lesen Lesen Sie Abschnitt 2.2 (Die reellen Zahlen) im Skript *Analysis für Informatik* von Prof. M. Struwe. Stellen Sie Fragen, falls Sie solche haben.

Lösung. Haben Sie den Abschnitt gelesen?

3.4. Supremum Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge. Ein Satz aus der Vorlesung besagt, dass A ein Supremum besitzt. Beweisen Sie diese Aussage im folgenden Fall:
$$\nexists r \in \mathbb{Q} : \ b = \Big\{ s \in \mathbb{Q} \,\Big|\, s \geq r \Big\}, \tag{7}$$

wobei $\quad b := \bigcap_{x \in A} x :=$ Durchschnitt aller $x \in A = \Big\{ r \in \mathbb{Q} \,\Big|\, \forall x \in A : \ r \in x \Big\}$. (8)

Tipps:

- Zeigen Sie, dass b eine reelle Zahl, d. h. ein Dedekind-Schnitt ist. Überprüfen Sie dazu die Bedingungen in der Definition eines Dedekind-Schnittes. Für die Bedingung $b \neq \emptyset$ verwenden Sie zum Beispiel, dass A nach oben beschränkt ist.
- Zeigen Sie, dass b eine obere Schranke für A ist.
- Zeigen Sie, dass jede obere Schranke für A grösser gleich b ist.
- Folgern Sie daraus, dass A ein Supremum besitzt.

Lösung.

(a) **Behauptung:** b ist ein Dedekind-Schnitt. **Beweis:**

- Bedingung $b \neq \emptyset$: Gemäss Annahme gibt es eine obere Schranke $c \in \mathbb{R}$ für A. Sei $x \in A$. Dann gilt $c \geq x$, d. h. $c \subseteq x$. Mit Hilfe von (8) folgt daraus, dass $c \subseteq b$. (Warum?) Da c ein Dedekind-Schnitt ist, ist c nicht leer. Es folgt, dass $b \neq \emptyset$.
- Bedingung $b \neq \mathbb{Q}$: Gemäss Annahme ist A nicht leer, d. h., es gibt ein $x \in A$. Da x ein Dedekind-Schnitt ist, gilt $x \neq \mathbb{Q}$. Gemäss (8) gilt $b \subseteq x$. Daraus folgt, dass $b \neq \mathbb{Q}$.
- Bedingung $\forall r \in b \forall s \in \mathbb{Q} : s > r \Rightarrow s \in b$: Seien $r \in b$ und $s \in \mathbb{Q}$, sodass $s > r$. Sei $x \in A$. Gemäss (8) gilt $r \in x$. Da x ein Dedekind-Schnitt ist und $s > r$, folgt daraus, dass $s \in x$. Mit Hilfe von (8) folgt, dass $s \in b$, wie gewünscht.
- Bedingung $\forall r \in b \exists s_0 \in b : s_0 < r$: Sei $r \in b$. Gemäss unserer Annahme (7) gilt

  $$b \neq S := \left\{ s \in \mathbb{Q} \,\middle|\, s \geq r \right\}. \tag{9}$$

  Es gilt $S \subseteq b$. (Warum?) Wegen (9) gilt daher $b \not\subseteq S$, d. h., $\exists s_0 \in b \setminus S$. Es gilt $s_0 < r$, wie gewünscht.

Das beweist die Behauptung, dass b ein Dedekind-Schnitt, d. h. eine reelle Zahl, ist.

(b) **Behauptung:** b ist obere Schranke für A.

Beweis: Sei $x \in A$. Gemäss (8) gilt $b \subseteq x$, d. h. $b \geq x$. Das beweist die Behauptung, dass b eine obere Schranke für A ist.

(c) **Behauptung:** Jede obere Schranke c für A erfüllt $c \geq b$.

Beweis: Sei $x \in A$. Dann gilt $c \geq x$, d. h. $c \subseteq x$. Mit Hilfe von (8) folgt daraus, dass $c \subseteq b$, d. h. $c \geq b$. Das beweist die Behauptung.

(d) Da b eine obere Schranke für A ist und jede obere Schranke für A grösser gleich b ist, ist b eine kleinste obere Schranke, d. h. ein Supremum, für A.

Die nächste Aufgabe wurde schon in Serie 2 gestellt. In der Zwischenzeit haben wir den zugehörigen Stoff behandelt.

3.5. Supremum und Infimum bestimmen

- Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum jeder der folgenden Mengen.
- Bestimmen Sie, ob die Menge ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

1.) **(∗)** $A := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

2.) $B := \left\{ \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in (1, 2] \right\}$.

3.) $C := \left\{ \frac{x}{x+1} \,\middle|\, x \in [2, \infty) \right\}$.

Lösung.

1.) Es gilt $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$ und deswegen

- $\inf A = 0$
- $\sup A = 1$

Die Menge A besitzt kein Minimum, da $\inf A = 0 \notin A$.

Sie besitzt ein Maximum, da $\sup A = 1 \in A$.

2.) Es gilt $B = \left\{ \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in (1, 2] \right\} = \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$ und deswegen

- $\inf B = \frac{1}{2}$
- $\sup B = 1$

Die Menge B besitzt ein Minimum, da $\inf B = \frac{1}{2} \in B$.

Sie besitzt kein Maximum, da $\sup B = 1 \notin B$.

3.) Es gilt $C = \left\{ \frac{x}{x+1} \,\middle|\, x \in [2, \infty) \right\} = \left[\frac{2}{3}, 1 \right)$ und deswegen

- $\inf C = \dfrac{2}{3}$
- $\sup C = 1$

Die Menge C besitzt ein Minimum, da $\inf C = \frac{2}{3} \in C$.

Sie besitzt kein Maximum, da $\sup C = 1 \notin C$.

3.6. Supremum und Infimum der Menge $-A$ Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge. Wir definieren:

$$-A := \Big\{ -a \;\Big|\; a \in A \Big\}$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A$$

Lösung. Wir zeigen zuerst die erste Gleichung: $\sup(-A) = -\inf A$. Es sei u eine untere Schranke von A. Dann gilt:

$$\forall a \in A : \quad u \leq a.$$

Folglich gilt auch

$$\forall a \in A : \quad -u \geq -a$$

Dies impliziert nun, dass $-u$ eine obere Schranke von $-A$ ist. Da insbesondere $\inf A$ eine untere Schranke von A ist, folgt somit, dass $-\inf A$ eine obere Schranke von $-A$ ist. Da $\sup(-A)$ die kleinste obere Schranke von $-A$ ist, muss gelten

$$\sup(-A) \leq -\inf A$$

Sei nun o eine obere Schranke von $-A$. Mit demselben Argument wie oben zeigt man, dass $-o$ eine untere Schranke von A ist. Daher ist insbesondere $-\sup(-A)$ eine untere Schranke von A, also

$$-\sup(-A) \leq \inf A$$

Multiplikation beider Seiten mit -1 dreht die Ungleichung um und ergibt:

$$\sup(-A) \geq -\inf A$$

Damit können wir nun schliessen:

$$\sup(-A) = -\inf A$$

Die zweite Gleichung, $\inf(-A) = -\sup(A)$ folgt nun aus der ersten Gleichung unter Verwendung von $-(-A) = A$:

$$\sup(A) = \sup(-(-A)) = -\inf(-A).$$

Multiplikation mit -1 ergibt die gesuchte Gleichung.

Alternativ kann man analog zum Beweis der ersten Gleichung vorgehen.

3.7. Komplexe Zahlen Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Standardform, d.h. in die Form $a + bi$ mit a, b reell:

(a) **(∗)** $(3 + 2i)(6 - 5i)$

(b) **(∗)** $\frac{1}{1+i}$

(c) $\frac{3+4i}{2-i}$

(d) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

(e) $\overline{(1 + i)^2} + (1 + i)^2$

(f) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

(g) $(1 + i)^6$ (*Hinweis*: Polarform verwenden)

Lösung.

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(6 - 5i) &= (3 \cdot 6 - 2 \cdot (-5)) + (3 \cdot (-5) + 2 \cdot 6)i \\ &= 28 - 3i\end{aligned}$$

(b) Man bemerke, dass aus $|z|^2 = z\overline{z}$ die Identität $|1 + i|^2 = (1 + i)(1 - i) = 2$ folgt. Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+i} &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\end{aligned}$$

(c) Analog zur vorherigen Aufgabe finden wir $|2-i|^2 = (2-i)(2+i) = 5$, daher:

$$\begin{aligned}\frac{3+4i}{2-i} &= \frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\ &= \frac{2+11i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i\end{aligned}$$

(d) Abermals ergibt sich durch $(1+i)(1-i) = 2$:

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{2i}{2} = i\end{aligned}$$

Daher wissen wir:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = i^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 4k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0, \\ i & \text{falls } n = 4k+1 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \\ -1 & \text{falls } n = 4k+2 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \\ -i & \text{falls } n = 4k+3 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

(e) Es gilt generell für komplexe Zahlen $z = a + bi$, a, b reell:

$$\overline{z} + z = (a - bi) + (a + bi) = 2a,$$

das heisst, die Summe ist das Doppelte des Realteils der Zahl. In unserem Fall gilt:

$$(1+i)^2 = 2i,$$

also ist der Realteil gerade 0 und somit finden wir:

$$\overline{(1+i)^2} + (1+i)^2 = 0$$

Eine direkte Berechnung führt zum gleichen Ergebnis.

(f) Dank der binomischen Formel finden wir:

$$(1+i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3\cdot i\sqrt{3} + 3\cdot(i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3 = 1 + 3\cdot i\sqrt{3} - 3\cdot 3 - i3\sqrt{3} = -8.$$

Daher gilt $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{-8}{8} = -1$

(g) Wir verwenden die Polarform: $1+i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,\mathrm{cis}\,\varphi = re^{i\varphi}$ für $r=\sqrt{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dann gilt:

$$(1+i)^6 = (r\,\mathrm{cis}\,\varphi)^6 = r^6\,\mathrm{cis}(6\varphi) = \sqrt{2}^6\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 8\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 8\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = -8i$$

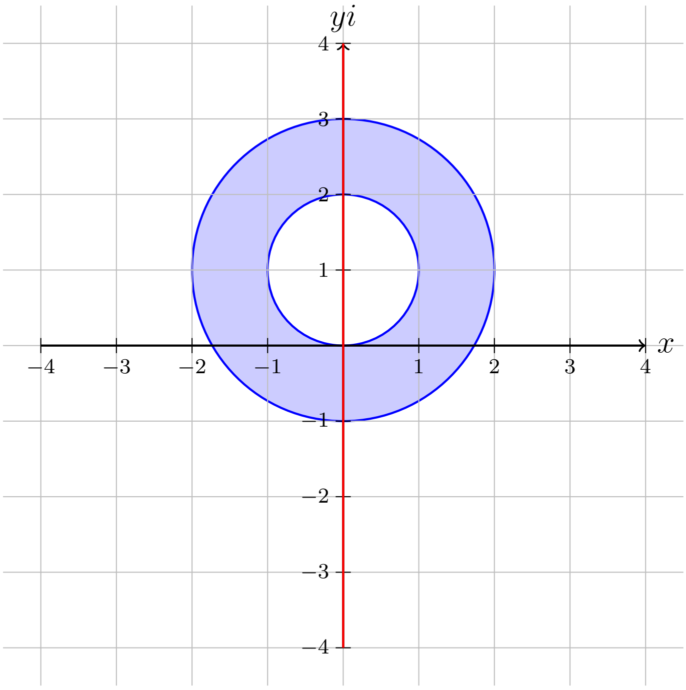
3.8. Punktmengen in $\mathbb{C}$

Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen ohne Computer oder andere technische Hilfsmittel:

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-i| < 2\}$

(b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\}$

Lösung. Im folgenden Bild ist die Menge M_1 blau eingefärbt und die Menge M_2 rot eingefärbt:



Dies kann wie folgt hergeleitet werden:

(a) Wir schreiben $z = x+iy$ mit $x,y\in\mathbb{R}$. Wir bemerken, dass

$$z \in M_1 \iff 1 < |z-i|^2 < 4.$$

Wir schreiben $z - i = x + i(y-1)$ und berechnen $|z-i|^2 = x^2 + (y-1)^2$. Bezüglich x, y kann die Menge M_1 also wie folgt geschrieben werden:

$$M_1 = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ 1 < x^2 + (y-1)^2 < 4\}$$

Es handelt sich also in der x, y-Ebene um einen Annulus (Kreisring) mit Mittelpunkt $(x, y) = (0, 1)$, äusseren Radius 2 und inneren Radius 1. Der Mittelpunkt $(x, y) = (0, 1)$ entspricht dabei der komplexen Zahl i.

Diese Schlussfolgerung kann auch intuitiv aus der Ungleichung $1 < |z - i| < 2$ gefolgert werden. Diese Ungleichung ist von allen komplexen Zahlen z erfüllt, deren Distanz zu i zwischen 1 und 2 liegt.

(b) Wir schreiben wieder $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und bemerken, dass

$$z \in M_2 \quad \iff \quad |z-1|^2 = |z+1|^2.$$

Wir haben

$$|z-1|^2 = |x-1+iy|^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad |z+1|^2 = |x+1+iy|^2 = (x+1)^2 + y^2.$$

Bezüglich x, y ist also die Menge M_2 gegeben durch

$$\begin{aligned}
& (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \\
\iff\ & (x-1)^2 = (x+1)^2 \\
\iff\ & x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 \\
\iff\ & -2x = 2x \\
\iff\ & x = 0.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$M_2 = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ x = 0\}.$$

Es handelt sich bei der Menge M_2 also genau um die rein imaginären Zahlen, oder bezüglich der x, y-Ebene um die y-Achse.

Auch diese Schlussfolgerung kann man intuitiv aus der Gleichung $|z-1| = |z+1|$ verstehen. Die Gleichung ist von allen komplexen Zahlen z erfüllt, welche die gleiche Distanz von 1 und -1 entfernt sind. Also die Mittelsenkrechte in der komplexen Ebene zwischen 1 und -1. Dies ist genau die imaginäre Achse.

3.9. Polynome in $\mathbb{C}$

Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Betrachten wir das Polynom

$$P(z) := az^2 + bz + c$$

für $z \in \mathbb{C}$. Sei $\sqrt{b^2-4ac}$ eine der Quadratwurzeln von b^2-4ac (zur Erinnerung: falls $b^2-4ac \neq 0$ hat b^2-4ac genau zwei unterschiedliche Quadratwurzeln q_1 und q_2 in $\mathbb{C}$ und es gilt $q_1 = -q_2$).
Seien

$$\alpha_+ := \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \alpha_- := \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $P(\alpha_+) = 0$ und $P(\alpha_-) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $P(z) = a(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Schliessen Sie daraus, dass α_+ und α_- die einzigen Nullstellen von P sind. (Bemerken Sie, dass möglicherweise $\alpha_+ = \alpha_-$, nämlich wenn $b^2-4ac = 0$.)

(c) Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynomen:

a) $z^2 + 6z + 10$

b) $4z^2 + (4i)z - 1$

c) $(z^2+1)(z-3i)^2$

Lösung.

(a) Wir setzen α_+ in P ein:

$$\begin{aligned}
P(\alpha_+) &= a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c \\
&= a\frac{b^2+b^2-4ac-b\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2} + \frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c \\
&= \frac{2a}{4a^2}(b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}) + \frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c \\
&= \frac{1}{2a}(b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}+2ac) = 0.
\end{aligned}$$

Analog zeigt man $P(\alpha_-) = 0$.

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
a(z-\alpha_+)(z-\alpha_-) &= a\left(z - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\
&= az^2 + 2az\frac{b}{2a} + a\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = az^2 + baz + c = P(z).
\end{aligned}$$

Sei nun $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P, d.h. $P(z_0) = 0$. Dann gilt

$$(z_0-\alpha_+)(z_0-\alpha_-) = 0.$$

Es folgt, dass $z_0 - \alpha_+ = 0$ oder $z_0 - \alpha_- = 0$ (da $\mathbb{C}$ ein Körper ist). Also gilt $z_0 = \alpha_+$ oder $z_0 = \alpha_-$.

(c) a) $-3 - i, \quad -3 + i$

b) $-\frac{i}{2}$

c) $i, -i, 3i$

3.10. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wie viele verschiedene Nullstellen hat das folgende Polynom?

$$P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P(z) = z \cdot \left(z^2+1\right)^2 - z^2 - z^5$$

(i) 0

(ii) 1

(iii) 3

(iv) 5

(b) Bestimmen Sie das Maximum der Menge A definiert wie folgt:

$$A := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup]2,4[$$

(i) Existiert nicht.

(ii) 1

(iii) 4

(iv) $+\infty$

(c) Was für eine geometrische Form hat die folgende Menge:

$$M := \left\{ c \in \mathbb{C} \;\middle|\; |c-1| = 2 \right\}?$$

(i) Ein Quadrat mit den Eckpunkten $(-1,-2), (-1,2), (3,-2)$ und $(3,2)$

(ii) Ein Geradenabschnitt vom Punkt $(-1,0)$ zu $(3,0)$

(iii) Ein Kreis mit Mittelpunkt i und Radius 2

(iv) Ein Kreis mit Mittelpunkt 1 und Radius 2

Lösung.

(a) (iii)

(b) (i)

(c) (iv)