Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

4.1. Gleichmächtigkeit

Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\mathbb{N}_0, \qquad \Big\{\text{Quadratzahl}\Big\} = \Big\{0, 1, 4, 9, \dots\Big\}$$

gleichmächtig sind.

Lösung. Um die Gleichmächtigkeit der beiden Mengen zu zeigen, definieren wir eine Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \to \{\text{Quadratzahl}\}, \qquad f(n) = n^2.$$

Injektivität: Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $f(n_1) = f(n_2)$. Dann gilt:

$$n_1^2 = n_2^2.$$

Da $n_1, n_2 \geq 0$ sind, folgt $n_1 = n_2$. Somit ist f injektiv.

Surjektivität: Sei $y \in \{\text{Quadratzahl}\}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $y = n^2$. Damit gilt $f(n) = y$. Somit ist f surjektiv.

Da f sowohl injektiv als auch surjektiv ist, ist f bijektiv. Es existiert also eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}_0$ und $\{\text{Quadratzahl}\}$. Folglich sind die Mengen gleichmächtig.

4.2. Komplexe Zahlen, cis-Funktion

(a) **(∗)** Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Standardform, d.h. in die Form $x + yi$ mit x, y reell:

$$(1+i)^2, \quad (1+i)(1-i), \quad \frac{1}{1-i}, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Tipp für die nächsten Zahlen: Verwenden Sei die Polarform.

$$(1+i)^{10}, \qquad \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^6$$

(b) Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene $\mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{cis}(\varphi + \psi) = \operatorname{cis}(\varphi)\operatorname{cis}(\psi), \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathbb{R}.$$

(d) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{cis}\left(\frac{k}{2}\pi\right) = i^k, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Lösung.

(a)
- $(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.
- $(1+i)(1-i) = 1 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$.
- $\frac{1}{1-i} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{1^2-(-1)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
- $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1^2-(-1)} = \frac{2i}{2} = i$.
- $\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
- $\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- $\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
- $(1+i)^{10}$: Zunächst bringen wir $1+i$ in die Polarform:

  $$1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

  Dann ergibt sich:

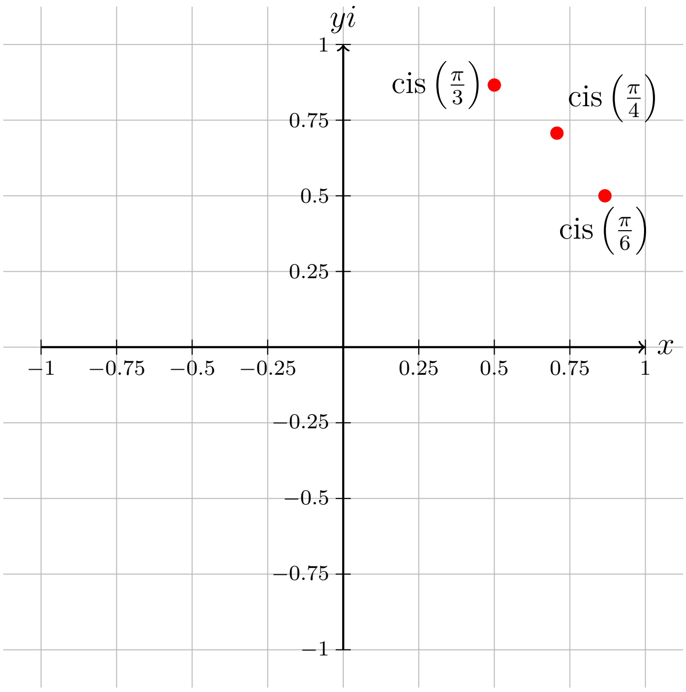
  $$(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{10} = 2^5 \operatorname{cis}\left(\frac{10\pi}{4}\right) = 32\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 32i.$$

- $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^6$: Zunächst bringen wir $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ in die Polarform:

  $$\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

  Dann ergibt sich:

  $$\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^6 = \operatorname{cis}(2\pi) = 1.$$



(b)

(c)

$$\operatorname{cis}(\varphi+\psi) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi).$$

Mit den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus erhalten wir:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi+\psi) &= \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)\\ \sin(\varphi+\psi) &= \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi).\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\operatorname{cis}(\varphi)\operatorname{cis}(\psi) = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))(\cos(\psi) + i\sin(\psi)).$$

Durch Ausmultiplizieren ergibt sich:

$$\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) + i(\sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi)).$$

Dies entspricht genau $\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)$. Also ist $\operatorname{cis}(\varphi+\psi) = \operatorname{cis}(\varphi)\operatorname{cis}(\psi)$.

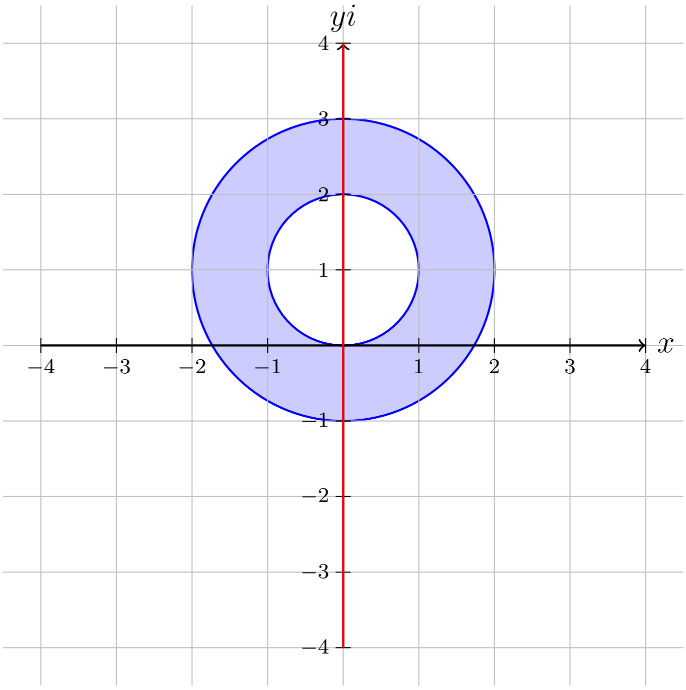
(d)

$$\operatorname{cis}\left(\frac{k}{2}\pi\right) = \operatorname{cis}\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^k = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^k = (0+i)^k = i^k$$

4.3. Punktmengen in $\mathbb{C}$ Skizzieren Sie die folgende Punktmengen ohne Computer oder andere technische Hilfsmittel:

$$A := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - i| < 2 \right\}$$

Lösung. Im folgenden Bild ist A die blaue Menge:



Dies kann wie folgt hergeleitet werden:

Wir schreiben $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wir bemerken, dass

$$z \in A \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < |z - i|^2 < 4.$$

Wir schreiben $z - i = x + i(y - 1)$ und berechnen $|z - i|^2 = x^2 + (y - 1)^2$. Bezüglich x, y kann die Menge A also wie folgt geschrieben werden:

$$A = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ 1 < x^2 + (y - 1)^2 < 4\}$$

Es handelt sich also in der x, y-Ebene um einen Annulus (Kreisring) mit Mittelpunkt $(x, y) = (0, 1)$, äusseren Radius 2 und inneren Radius 1. Der Mittelpunkt $(x, y) = (0, 1)$ entspricht dabei der komplexen Zahl i.

Diese Schlussfolgerung kann auch intuitiv aus der Ungleichung $1 < |z - i| < 2$ gefolgert werden. Diese Ungleichung ist von allen komplexen Zahlen z erfüllt, deren Distanz zu i zwischen 1 und 2 liegt.

4.4. quadratisches komplexes Polynom In der Vorlesung wurde der Fundamentalsatz der Algebra erwähnt, welcher besagt, dass jedes nicht konstante komplexe (oder reelle) Polynom (mindestens) eine komplexe Nullstelle besitzt. Im Fall eines quadratischen Polynoms gibt es für die Nullstellen eine Lösungsformel. Seien nämlich $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$.

(a) Was ist die Formel für die Nullstellen des Polynoms

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P(z) := az^2 + bz + c?$$

Tipp: Die Formel ist die gleiche wie für reelle Polynome, ausser dass die Quadratwurzel einer komplexen Zahl zweideutig ist.

(b) Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynome:

1) $z^2 + 6z + 10$
2) $4z^2 + 4iz - 1$
3) $(z^2 + 1)(z - 3i)^2$

Lösung.

(a) Sei $\sqrt{b^2 - 4ac}$ eine der Quadratwurzeln von $b^2 - 4ac$ (zur Erinnerung: falls $b^2 - 4ac \neq 0$ hat $b^2 - 4ac$ genau zwei unterschiedliche Quadratwurzeln q_1 und q_2 in $\mathbb{C}$ und es gilt $q_1 = -q_2$).
Seien

$$\alpha_+ := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \alpha_- := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(b) 1) $-3 - i, \quad -3 + i$
2) $-\frac{i}{2}$
3) $i, -i, 3i$

4.5. Folgen, Konvergenz, Divergenz Zeigen Sie das Folgende:

(a) **(∗)** Die Folge $\left(a_n := \frac{2}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A := 0$.

(b) **(∗)** Die Folge $\left(a_n := 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A := 1$.

(c) Die Folge $\left(a_n := \frac{2}{n} + 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A := 1$.

(d) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert.

Lösung.

(a) Sei $\varepsilon \in (0,\infty)$. Gemäss dem Archimedischen Prinzip gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$n_0 \geq \frac{2}{\varepsilon}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, sodass $n \geq n_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|a_n - A| &= \left|\frac{2}{n} - 0\right| \\
&= \frac{2}{n} \\
&\leq \frac{2}{n_0} \qquad (\text{da } n \geq n_0) \\
&\leq \varepsilon \qquad (\text{da } n_0 \geq \frac{2}{\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Daher konvergiert die Folge $\left(a_n := \frac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $A := 0$.

(b) Sei $\varepsilon \in (0,\infty)$. Gemäss dem Archimedischen Prinzip gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, sodass $n \geq n_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|a_n - A| &= \left|1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} \qquad (\text{wegen der Monotonie der Wurzel und } n \geq n_0) \\
&\leq \varepsilon \qquad (\text{da } n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^2}).
\end{aligned}$$

Daher konvergiert die Folge $\left(a_n := 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $A := 1$.

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass wenn zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren mit Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, dann konvergiert die Summe der beiden Folgen gegen $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.

Die Folge $\left(a_n := \frac{2}{n} + 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau die Summe der Folgen aus den Teilaufgaben a) und b). Somit wissen wir, dass sie konvergiert und der Grenzwert $A = 0 + 1 = 1$ ist.

Alternative Lösung über Definition: Zu zeigen ist: $\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{n} + 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\left|\frac{2}{n} + 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right| < \epsilon$$

Mit der Dreiecksungleichung bekommen wir

$$\left|\frac{2}{n} + 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right| \leq \left|\frac{2}{n} - 0\right| + \left|1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right|.$$

Aus Teilaufgaben a) und b) wissen wir, dass $\left|\frac{2}{n} - 0\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq \lceil\frac{4}{\epsilon}\rceil$ und $\left|1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq \lceil\frac{4}{\epsilon^2}\rceil$. Daraus folgt, dass für alle $n \geq \max\left(\lceil\frac{4}{\epsilon}\rceil, \lceil\frac{4}{\epsilon^2}\rceil\right)$ gilt, dass

$$\left|\frac{2}{n} + 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right| \leq \left|\frac{2}{n} - 0\right| + \left|1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Somit konvergiert die Folge $\left(a_n := \dfrac{2}{n} + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1.

(d) Aus dem Skript wissen wir, dass eine Folge genau dann divergiert, wenn

$$\forall A \in \mathbb{C} \exists \epsilon \in (0,\infty) \forall n_0 \in \mathbb{N}_0 \exists n \in \mathbb{N}_0 : n \geq n_0 \wedge |a_n - A| > \epsilon.$$

Seien $A \in \mathbb{C}$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Wir wählen $\epsilon = \frac{1}{2}$. Dann wählen wir

$$n = \begin{cases} n_0 & \text{wenn } (A > 0 \wedge n_0 \text{ ungerade}) \vee (A \leq 0 \wedge n_0 \text{ gerade}) \\ n_0 + 1 & \text{wenn } (A > 0 \wedge n_0 \text{ gerade}) \vee (A \leq 0 \wedge n_0 \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Im ersten Fall ist entweder $A > 0$ und $a_n = a_{n_0} = (-1)^{n_0} = -1$, oder $A \leq 0$ und $a_n = a_{n_0} = (-1)^{n_0} = 1$. In beiden Teilfällen ist $|a_n - A| \geq 1 > \epsilon$. Im zweiten Fall ist entweder $A > 0$ und $a_n = a_{n_0+1} = (-1)^{n_0+1} = -1$, oder $A \leq 0$ und $a_n = a_{n_0+1} = (-1)^{n_0+1} = 1$. Wiederum ist in beiden Teilfällen $|a_n - A| \geq 1 > \epsilon$. Somit divergiert die Folge.

4.6. lesen Lesen Sie das Folgende und stellen Sie Fragen, falls Sie solche haben:

(a) Abschnitt 2.4 *Der euklidische Raum* im Skript *Analysis für Informatik* von Prof. M. Struwe.

(b) 3.2 *Grenzwert einer Folge*, insbesondere Beispiele 3.2.1. iii), 3.2.2. iii,iv)

Lösung. Haben Sie den Text gelesen?

4.7. Produkt von Folgen

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist (d.h. $\exists\, C > 0$ so dass $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \le C$).
Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Lösung. Wir verwenden die Definition der Konvergenz gegen 0. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n b_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Da die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert ein $C > 0$, sodass $|b_n| \le C$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Wir setzten nun $\tilde{\varepsilon} = \frac{\epsilon}{C}$. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge N$ gilt $|a_n| < \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{C}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge N$,

$$|a_n b_n| \le |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war schliessen wir, dass $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

4.8. Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) (∗) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n+3}{n^2+2}$,

(b) (∗) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5}$,

(c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$,

(d) $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{\sin(n)}{2^n} + \frac{\cos(n)}{n^4}\right)$.

Hinweis: *Für d) benützen Sie Aufgabe (Produkt von Folgen)*

Lösung.

(a) Wir kürzen Zähler und Nenner mit n^2 und finden:

$$\frac{n^2-n+3}{n^2+2} = \frac{1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}$$

Nutzen wir nun Satz 3.3.2, so sehen wir aufgrund der Tatsache, dass $1/n, 1/n^2$ Nullfolgen sind:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n+3}{n^2+2} &= \frac{\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

(b) Wir sehen sofort:

$$\frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5} = \frac{\frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^n n^2}}{1 + \frac{5}{2^n n^2}}$$

Aus Satz 3.3.2. folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^n n^2}}{1 + \frac{5}{2^n n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^n n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{5}{2^n n^2}} \\ &= \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

Wobei wir verwendet haben, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$ für jede Potenz $k \in \mathbb{N}$, siehe Vorlesung.

(c) Es gilt:

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = \frac{n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{n} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$$

Da $1/n^2$ eine Nullfolge ist, erwarten wir als Grenzwert 1. Wir wollen also nun den folgenden Ausdruck betrachten:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - 1 &= \frac{(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - 1)(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + 1)}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + 1} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{n^2} - 1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + 1} \\ &= \frac{-1}{n^2(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + 1)}\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + 1 \geq 1$, daher finden wir:

$$\left|\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - 1\right| = \frac{1}{n^2(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + 1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

Da $\frac{1}{n^2}$ eine Nullfolge ist, sehen wir, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\left|\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1\right| < \epsilon, \quad \forall\, n \geq N.$$

Dies zeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = 1.$$

(d) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$. Desweiteren gilt $|\sin(n)| \leq 1$, $|\cos(n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also sind die Folgen $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Aus der Aufgabe "Produkt von Folgen" folgt nun, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}\sin(n) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n) = 0.$$

Mithilfe von Satz 3.3.2 schliessen wir also

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{\sin(n)}{2^n}+\frac{\cos(n)}{n^4}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}\sin(n) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n) = 0$$

.

Die folgende Aufgabe wird in der Vorlesung verwendet, um zu zeigen, dass die geometrische Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ im Fall $|z| < 1$ gegen 0 konvergiert.

4.9. Bernoullische Ungleichung Die Bernoullische Ungleichung besagt, dass

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \qquad \forall x \in [-1,\infty),\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweisen Sie diese Ungleichung.

Tipp: Verwenden Sie Induktion über n.

Lösung. Wir beweisen die Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $x \in [-1,\infty)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ mithilfe von vollständiger Induktion über n.

Induktionsanfang: $n = 0$

Für $n = 0$ gilt:

$$(1+x)^0 = 1 \quad \text{und} \quad 1+0\cdot x = 1.$$

Somit ist $(1+x)^0 \geq 1+0\cdot x$ wahr.

Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und es gelte die Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für ein gegebenes } x \in [-1, \infty).$$

Induktionsschritt: Zu zeigen ist:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$

Wir multiplizieren die Induktionsvoraussetzung mit $(1+x)$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx) \cdot (1+x).$$

Nun multiplizieren wir aus:

$$(1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2.$$

Da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in [-1, \infty)$, folgt:

$$1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

Somit erhalten wir:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt.

Schluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $x \in [-1, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

4.10. Wurzelberechnung Es sei $c \geq 1$ eine reelle Zahl. Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch die folgende Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} a_1 &= c, \\ \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \end{aligned}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{c}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$1 \leq a_n \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n folgende Ungleichung gilt:
$$a_n^2 \geq c$$

(c) Zeigen Sie, dass die Folge monoton fallend ist, d.h. für alle natürlichen Zahlen n gilt:
$$a_n \geq a_{n+1}$$

(d) Argumentieren Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und der Grenzwert a die folgende Gleichung erfüllt:
$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right).$$
Folgern Sie, dass $a^2 = c$.

(e) Für $c = 3$, berechnen Sie (mit dem Taschenrechner/Computer) a_2, a_3, a_4 und a_5. Wieviele Stellen nach dem Komma stimmen bei a_5 bereits mit $\sqrt{3}$ überein?

Lösung.

(a) Es ist $a_1 = c$, also gilt die Ungleichung sicherlich für $n = 1$. Wir fahren per Induktion fort. Man nehme an, dass:
$$1 \leq a_n \leq c,$$
für ein n gilt. Dann folgern wir:
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c}{c}\right) = 1,$$
da $1 \leq a_n \leq c$. Vollkommen analog folgt die andere Ungleichung:
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(c + \frac{c}{1}\right) = c.$$

(b) Wir bemerken, dass $a_n \geq 1$ für alle n. Es reicht, die Ungleichung für alle $n \geq 2$ zu zeigen, da $a_1^2 = c^2 \geq c$ wegen $c \geq 1$. Somit können wir uns darauf konzentrieren, a_{n+1} für $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten, wobei wir die rekursive Formel verwenden:
$$\begin{aligned}
a_{n+1}^2 - c &= \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)^2 - c \\
&= \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2a_n\frac{c}{a_n} + \frac{c^2}{a_n^2} - 4c\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(a_n^2 - 2\cdot c + \frac{c^2}{a_n^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{c}{a_n}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$
Somit folgt die gewünschte Ungleichung.

(c) Wir betrachten den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{c}{a_n}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(a_n - \frac{c}{a_n}\Big) \\ &= \frac{1}{2a_n}\Big(a_n^2 - c\Big) \geq 0, \end{aligned}$$

wobei wir $a_n \geq 1 > 0$ sowie $a_n^2 \geq c$ für alle natürlichen Zahlen n verwendet haben.

(d) Da die Folge nach unten beschränkt und monoton fallend ist, konvergiert sie gemäss Satz 3.3.1 (Monotone Konvergenz). Wir schreiben $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.
(Im Skript ist der Satz nur für monoton wachsende Folgen formuliert. Aber $-a_n$ ist eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge, auf die der Satz angewandt werden kann. Dann konvergiert also die Folge $-a_n$ und somit auch die Folge $a_n = -1 \cdot (-a_n)$ gemäss Satz 3.3.2).

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} = 1/2(a_n + c/a_n)$$

Die linke Seite dieser Gleichung konvergiert gegen a und die rechte Seite konvergiert gemäss Satz 3.3.2 gegen

$$\frac{1}{2}\Big(a + \frac{c}{a}\Big).$$

Wir finden also

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{c}{a_n}\Big) = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{c}{a}\Big)$$

Dies ist die gesuchte Gleichung für a. Durch Umformen vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$2a^2 = a^2 + c \;\Rightarrow\; a^2 = c \;\Rightarrow\; a = \sqrt{c}$$

Beachten Sie, dass in der letzten Implikation $a \geq 0$ verwendet wurde, was aus der Nicht-Negativität der Folgeglieder folgt.

(e) Die Folgeglieder sind:

$$a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1.75,\ a_4 = 1.73214,\ a_5 = 1.73205081$$

Vergleicht man dies mit:

$$\sqrt{3} \sim 1.732050808...,$$

so sehen wir, dass a_5 bis zur siebten Nachkommastelle mit $\sqrt{3}$ übereinstimmt.

4.11. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wie viele verschiedene Nullstellen hat das folgende Polynom?

$$P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P(z) = z \cdot \left(z^2 + 1\right)^2 - z^2 - z^5$$

(i) 0

(ii) 1

(iii) 3

(iv) 5

(b) Was für eine geometrische Form hat die folgende Menge:

$$M := \left\{ c \in \mathbb{C} \;\middle|\; |c-1| = 2 \right\}?$$

(i) Ein Quadrat mit den Eckpunkten $(-1,-2), (-1,2), (3,-2)$ und $(3,2)$

(ii) Ein Geradenabschnitt vom Punkt $(-1,0)$ zu $(3,0)$

(iii) Ein Kreis mit Mittelpunkt i und Radius 2

(iv) Ein Kreis mit Mittelpunkt 1 und Radius 2

(c) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{16n^3 + 100n + 1000000}{27n^3 + 10920n + 2020}$$

(i) Divergiert, d.h. keine Konvergenz

(ii) Konvergiert, mit Grenzwert 0

(iii) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{16}{27}$

(iv) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{4}{9}$

(v) Konvergiert, mit Grenzwert 1000000

(d) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{n^2}{2^n n^2 + 8}$$

(i) Divergiert, d.h. keine Konvergenz

(ii) Konvergiert, mit Grenzwert 0

(iii) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{2}$

(iv) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{4}$

(v) Konvergiert, mit Grenzwert 1

(e) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{n^3 + 22n^2 - 10}{29n^2 - 27n + 8}$$

(i) Divergiert, d.h. keine Konvergenz

(ii) Konvergiert, mit Grenzwert 0

(iii) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{29}$

(iv) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{22}{29}$

(v) Konvergiert, mit Grenzwert 29

Lösung.

(a) (iii)

(b) (iv)

(c) (iii)

(d) (ii)

(e) (i)