Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

5.1. Limes superior und inferior Bestimmen Sie:

(a) **(∗)** $\limsup_{k\to\infty}(-1)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)$

(b) **(∗)** $\liminf_{k\to\infty}(-1)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)$

(c) $\limsup_{k\to\infty} k\Big(1+(-1)^k\Big)$

(d) $\liminf_{k\to\infty} k\Big(1+(-1)^k\Big)$

Lösung.

(a) Wir definieren die Folgen $\left(a_k := (-1)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$ und $\left(b_n := \sup_{k\geq n} a_k\right)$ und betrachten den Grenzwert von b_n.

Die Folge (a_k) alterniert, da $(-1)^k$ für gerade k gleich 1 und für ungerade k gleich -1 ist. Das bedeutet:

$$a_{2k} = 1+\frac{1}{2k} \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = -\left(1+\frac{1}{2k+1}\right).$$

Für gerade k ist a_k also positiv und für ungerade k negativ.

Wir folgern daraus, dass:

$$b_n = 1+\frac{1}{n} \text{ für gerade } n$$
$$b_n = 1+\frac{1}{n+1} \text{ für ungerade } n.$$

Beide Teilfolgen konvergieren gegen 1, also konvergiert auch b_n gegen 1.

Somit ist:

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

(b) Wir definieren $\left(a_k := (-1)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$ und $b_n := \inf_{k\geq n} a_k$ und betrachten den Grenzwert von b_n. Wie schon in Teilaufgabe a) haben wir:

$$a_{2k} = 1+\frac{1}{2k} \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = -\left(1+\frac{1}{2k+1}\right).$$

Für gerade k ist a_k positiv und für ungerade k negativ.

Wir folgern daraus, dass:

$$b_n = -\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \text{ für gerade } n$$
$$b_n = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ für ungerade } n.$$

Beide Teilfolgen konvergieren gegen -1, also konvergiert auch b_n gegen -1.

Somit ist:

$$\liminf_{k\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} b_n = -1.$$

(c) Wir definieren die Folge $b_n := \sup_{k\geq n} k(1+(-1)^k)$ und betrachten den Grenzwert von b_n.

Die Folge $a_k := k(1 + (-1)^k)$ ist gegeben durch:

$$a_{2k} = 4k \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = 0.$$

Somit folgt, dass $b_n = \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt, dass

$$\limsup_{k\to\infty} k(1 + (-1)^k) = \infty.$$

(d) Wir definieren die Folge $b_n = \inf_{k\geq n} k(1+(-1)^k)$ und betrachten den Grenzwert von b_n.

Die Folge $a_k := (1 + (-1)^k)$ hat die gleiche Form wie zuvor:

$$a_{2k} = 4k \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = 0.$$

Somit folgt:

$$b_n = 0.$$

Daher ist:

$$\liminf_{k\to\infty} k(1 + (-1)^k) = 0.$$

5.2. Konvergenz und bestimmte Divergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$

(a) Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ durch

$$a_n := \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n} \\ 2^{-n} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert und bestimmen Sie den Limes.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung über Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$ sowie die Konvergenz gewisser Folgen, die wir schon in der Vorlesung gezeigt haben.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert!

Tipps: Sei $\varepsilon \in (0,\infty)$. Zeigen Sie das Folgende:

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

  $$(1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2.$$

  Verwenden Sie hierfür einen Satz, den Sie aus dem Gymnasium kennen.

- Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass $\frac{n_0 - 1}{2}\varepsilon^2 \geq 1$.

  Sei jetzt $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $n \geq n_0$.

- Es gilt $(1+\varepsilon)^n \geq n$.

Zeigen Sie jetzt, dass $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}_0} \to 1$, indem Sie die folgende Tatsache verwenden:

$$\forall x, y \in [0,\infty), n \in \mathbb{N} : x^n \geq y^n \Rightarrow x \geq y. \tag{1}$$

Zusatzaufgabe: Beweisen Sie (1). Sie dürfen dazu verwenden, dass $\mathbb{R}$ ein (total) geordneter Körper ist, d. h. die Eigenschaften A.i)-iv), M.i)-iv), D), O.i)-iv), K.i),ii) in Abschnitt 2.2 im Skript von Prof. M. Struwe besitzt.

(c) **(∗)** Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

Tipps:

- Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass

  $$(2k)! \geq k^k, \qquad (2k+1)! \geq (k+1)^{k+1}.$$

- Zeigen Sie damit, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

- Zeigen Sie damit, dass $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

Lösung.

(a) Um die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu zeigen, zeigen wir zunächst, dass beide Komponenten von a_n Cauchy-Folgen sind.

Erste Komponente: Die erste Komponente ist gegeben durch $a_n^1 = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$. Um zu zeigen, dass diese Komponente eine Cauchy-Folge ist, betrachten wir den Unterschied zwischen zwei Folgengliedern:

$$|a_n^1 - a_m^1| = \left|\frac{n+1}{n} - \frac{m+1}{m}\right| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{1}{m}\right)\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|.$$

Sei jetzt ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n, m > n_0$, dass

$$|a_n^1 - a_m^1| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| < 2\left|\frac{1}{n_0}\right| = \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Daher ist die erste Komponente eine Cauchy-Folge.

Zweite Komponente: Die zweite Komponente ist gegeben durch $a_n^2 = 2^{-n}$. Wir zeigen ebenfalls, dass diese Komponente eine Cauchy-Folge ist. Sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 > 1 - \log_2 \varepsilon$. Dann gilt für allen $n, m > n_0$, dass

$$|a_n^2 - a_m^2| = |2^{-n} - 2^{-m}| \leq |2^{-n}| + |2^{-m}| \leq 2|2^{-n_0}| = 2^{1-n_0} < \varepsilon.$$

Daher ist auch die zweite Komponente eine Cauchy-Folge.

Da sowohl die erste als auch die zweite Komponente von a_n Cauchy-Folgen sind, folgt aus dem Cauchy-Kriterium, dass die gesamte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Grenzwertbestimmung: Wir bestimmen nun den Grenzwert. Die Grenzwerte der beiden Komponenten sind:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^1 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

und

$$\lim_{n\to\infty} a_n^1 = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0.$$

Somit konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

(b) Wir beginnen damit die Aussagen aus den Tipps zu beweisen:

- Wir wissen, dass $\varepsilon > 0$. Somit ist auch jeder Term der Form $\binom{n}{k}\varepsilon^2 > 0$. Es folgt, dass

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\varepsilon^k \geq \binom{n}{2}\varepsilon^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}\varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2.$$

- Wir formen um, sodass n_0 alleine auf einer Seite steht.

$$\frac{n_0-1}{2}\varepsilon^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad n_0 - 1 \geq \frac{2}{\varepsilon^2} \quad \Leftrightarrow \quad n_0 \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}.$$

  Da $1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$ reell ist folgt aus dem Archimedischen Prinzip, dass das n_0 existiert.

- Aus dem ersten und zweiten Tipp folgt, dass

$$(1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \geq \frac{n(n_0-1)}{2}\varepsilon^2 \geq n$$

Sei $\varepsilon > 0$ jetzt gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass $\frac{n_0-1}{2}\varepsilon^2 \geq 1$. Aus Gleichung 1 folgt mit $x = \sqrt[n]{n}$ und $y = 1$, dass $\sqrt[n]{n} \geq 1$ ist. Für die Definition vom Limes bedeutet das, dass

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| = \sqrt[n]{n} - 1.$$

Wir berechnen nun

$$\left(1 + \left|\sqrt[n]{n} - 1\right|\right)^n = \left(1 + \sqrt[n]{n} - 1\right)^n = (\sqrt[n]{n})^n = n \leq (1+\varepsilon)^n.$$

Mittels Kontraposition folgt aus Gleichung 1 mit $x = 1 + |\sqrt[n]{n} - 1|$ und $y = 1 + \varepsilon$, dass

$$1 + \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| \leq 1 + \varepsilon.$$

Indem wir auf beiden Seiten 1 subtrahieren bekommen wir

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right| \leq \varepsilon,$$

was zeigt, dass $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.

Zusatzaufgabe: Wir werden die Implikation mittels Induktion beweisen. Der Induktionsanfang ist dabei durch $n = 1$ gegeben. Dann reduziert sich Gleichung 1 auf

$$x \geq y \Rightarrow x \geq y,$$

was offensichtlich stimmt.

Die Induktionsannahme ist nun, dass $x^n \geq y^n \Rightarrow x \geq y$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} x^n \geq y^n &\overset{\text{Induktionsannahme}}{\Rightarrow} x^n \geq y^n \wedge x \geq y \overset{\text{K.ii}}{\Rightarrow} xx^n \geq xy^n \wedge x \geq y \\ &\overset{\text{K.ii}}{\Rightarrow} xx^n \geq yy^n \Rightarrow x^{n+1} \geq y^{n+1}. \end{aligned}$$

(c) **($*$)** Wir beginnen damit die Behauptungen aus den Tipps zu zeigen:

- Wir formen $(2k)!$ um und bekommen

$$(2k)! = \prod_{i=1}^{2k} i = \left(\prod_{i=1}^{k} i\right)\left(\prod_{i=k+1}^{2k} i\right) = k!\left(\prod_{i=k+1}^{2k} i\right) \geq k!\left(\prod_{i=k+1}^{2k} k\right) = k!k^k \geq k^k.$$

  Ebenso formen wir $(2k+1)!$ um und sehen, dass

$$\begin{aligned} (2k+1)! = \prod_{ß=1}^{2k+1} i = \left(\prod_{i=1}^{k+1} i\right)\left(\prod_{i=k+2}^{2k+1} i\right) &= (k+1)!\left(\prod_{i=k+2}^{2k+1} i\right) \\ &\geq (k+1)!\left(\prod_{i=k+2}^{2k+1} (k+1)\right) = (k+1)!(k+1)^k \\ &\geq (k+1)(k+1)^k = (k+1)^{k+1}. \end{aligned}$$

- Wir rechnen beide Seiten der Ungleichung hoch n.

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

  Nun können wir das Resultat aus dem vorherigen Tipp anwenden.

Für n gerade: Sei $n = 2k$. Dann ist

$$n! = (2k)! \geq k^k = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Für n ungerade: Sei $n = 2k+1$. Dann ist

$$n! = (2k+1)! \geq (k+1)^{k+1} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Wir benennen die Folge $a_n = \sqrt[n]{n!}$. Wir müssen zeigen, dass

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq C.$$

Sei $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass $n_0 > 2C^2$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$a_n = \sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n}{2}} \geq \sqrt{\frac{n_0}{2}} > C.$$

Die Folge $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert also bestimmt gegen ∞.

5.3. Konvergenz einer Reihe Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren:

(a) **(∗)** die zur Folge $\left(\frac{(k!)^2}{(2k)!}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, also die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(k!)^2}{(2k)!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Tipp: Verwenden Sie das Quotientenkriterium.

(b) die zur Folge $\left(\frac{k!}{k^k}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe

Tipp: Verwenden Sie das Quotientenkriterium.

(c) **(∗)** die zur Folge $\left(k^p z^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, wobei $z \in \mathbb{C}$, sodass $|z| < 1$, und $p \in \mathbb{N}$

Tipp: Verwenden Sie das Wurzelkriterium und Aufgabe 5.2(b)!

(d) die zur Folge $\left(a_k := \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe

Tipp: Verwenden Sie ein Konvergenz-Kriterium aus der Vorlesung.

Lösung.

(a) Sei

$$a_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!}.$$

Wir betrachten den Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{\left((k+1)!\right)^2}{(2(k+1))!}\cdot\frac{(2k)!}{(k!)^2}.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^2+2k+1}{4k^2+6k+2}.$$

Der Term hat den gleichen Grad im Zähler und Nenner, also betrachten wir das Verhalten des führenden Koeffizienten:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{4k^2} = \frac{1}{4}.$$

Da der Grenzwert $\frac{1}{4} < 1$ ist, folgt aus dem Quotientenkriterium, dass die Reihe absolut konvergiert.

(b) Sei

$$a_k = \frac{k!}{k^k}.$$

Wir wenden das Quotientenkriterium an und berechnen

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\cdot\frac{k^k}{k!}.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{(k+1)^k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{-k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} = \left(\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{-1}.$$

Da $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$ für $k\to\infty$, folgt

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{e} < 1.$$

Somit konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

(c) Sei

$$a_k = k^p z^k, \quad \text{wobei } |z| < 1.$$

Wir wenden das Wurzelkriterium an:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^p |z|^k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^p} \cdot \sqrt[k]{|z|^k} = \lim_{k\to\infty} k^{p/k} \cdot |z|.$$

Da $k^{p/k} \to 1$ für $k \to \infty$ und $|z| < 1$, ergibt sich

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |z| < 1.$$

Somit konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

(d) Die Reihe ist gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Dies ist eine alternierende Reihe der Form $\sum(-1)^k b_k$ mit $b_k = \frac{1}{2k+1}$. Da $\frac{1}{2k+1} \to 0$ für $k \to \infty$ und (b_k) monoton fallend ist, erfüllt die Reihe die Bedingungen des Leibniz-Kriteriums. Somit konvergiert die Reihe.

5.4. Cauchy-Kriterium für Konvergenz einer Folge, harmonische Reihe divergiert, ζ-Reihe

(a) **($*$)** Wir definieren die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$x_k := \begin{cases} 3^{-k}, & \text{falls } 4|k, \\ -3^{-k}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Folge

$$\left(a_n := \sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

konvergiert.

Tipp: Verwenden Sie das Cauchy-Kriterium.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$. Formulieren die Verneinung der Aussage, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist, so um, dass darin keine Negation $\neg$ mehr vorkommt. Verwenden Sie dazu Quantoren.

(c) Zeigen Sie, dass die harmonische Reihe keine Cauchy-Folge ist.

Bemerkung: Wir haben uns das schon in der Vorlesung überlegt. Das Ziel dieser Aufgabe ist, diese Überlegungen zu präzisieren.

(d) Zeigen Sie, dass die harmonische Reihe divergiert.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(e) Wir definieren die ζ*-Reihe* für $s \in \mathbb{R}$ als die zur Folge $\left(a_k := \frac{1}{k^s}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, d. h. die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zeigen Sie, dass für jedes $s \in (-\infty, 1]$ die ζ-Reihe für s divergiert.

Lösung.

(a) Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Gemäss dem Archimedischen Prinzip gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Gemäss der Bernoullischen Ungleichung gilt $3^{n_0} = (1+2)^{n_0} \geq 1 + 2n_0$, also

$$3^{-n_0} \leq \frac{1}{1+2n_0} < \varepsilon. \tag{2}$$

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$n \geq m \geq n_0.$$

Es gilt $a_n - a_m = \sum_{k=m+1}^{n} x_k$. Mittels der Dreiecksungleichung folgt daraus, dass

$$\begin{aligned}
\left|a_n - a_m\right| &\leq \sum_{k=m+1}^{n} |x_k| \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} 3^{-k} \\
&= \frac{3^{-(m+1)} - 3^{-(n+1)}}{1 - \frac{1}{3}} \qquad \text{(Überprüfen Sie das!)} \\
&= \frac{3^{-m} - 3^{-n}}{2} \\
&\leq 3^{-n_0} \qquad (\text{da } m \geq n_0) \\
&< \varepsilon \qquad (\text{gemäss (2)}).
\end{aligned}$$

Daher ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge. Darum konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gemäss einem Satz aus der Vorlesung.

(b) Wir definieren die Aussage $P((a_k)_{k\in\mathbb{N}_0})$, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist wie in der Vorlesung als

$$P((a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}) := \forall\varepsilon \in (0,\infty)\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall m,n \in \mathbb{N}_0 : m,n \geq n_0 \to |a_m - a_n| \leq \varepsilon.$$

Die Verneinung davon ist

$$\begin{aligned}
\neg P((a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}) &\Leftrightarrow \neg\left(\forall\varepsilon \in (0,\infty)\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall m,n \in \mathbb{N}_0 : m,n \geq n_0 \to |a_m - a_n| \leq \varepsilon\right)\\
&\Leftrightarrow \exists\varepsilon \in (0,\infty) : \neg\left(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall m,n \in \mathbb{N}_0 : m,n \geq n_0 \to |a_m - a_n| \leq \varepsilon\right)\\
&\Leftrightarrow \exists\varepsilon \in (0,\infty)\forall n_0 \in \mathbb{N}_0 : \neg\left(\forall m,n \in \mathbb{N}_0 : m,n \geq n_0 \to |a_m - a_n| \leq \varepsilon\right)\\
&\Leftrightarrow \exists\varepsilon \in (0,\infty)\forall n_0 \in \mathbb{N}_0 \exists m,n \in \mathbb{N}_0 : \neg\left(m,n \geq n_0 \to |a_m - a_n| \leq \varepsilon\right)\\
&\Leftrightarrow \exists\varepsilon \in (0,\infty)\forall n_0 \in \mathbb{N}_0 \exists m,n \in \mathbb{N}_0 : m,n \geq n_0 \wedge \neg|a_m - a_n| \leq \varepsilon\\
&\Leftrightarrow \exists\varepsilon \in (0,\infty)\forall n_0 \in \mathbb{N}_0 \exists m,n \in \mathbb{N}_0 : m,n \geq n_0 \wedge |a_m - a_n| > \varepsilon.
\end{aligned}$$

(c) Die harmonische Reihe ist gegeben durch:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Wie in der vorherigen Teilaufgabe hergeleitet zeigen wir, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für jedes $n_0 \in \mathbb{N}_0$ ein $m, n \geq n_0$ existiert mit $|a_n - a_m| > \varepsilon$. Wählen wir $\varepsilon = \frac{1}{4}$ und setzen $m = 2n_0$ und $n = n_0$, dann gilt:

$$|a_{2n_0} - a_{n_0}| = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{2n_0} = \frac{n_0}{2n_0} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge.

(d) Nach dem Cauchy-Kriterium ist eine Folge in $\mathbb{R}^d$ konvergent genau dann wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Da die harmonische Reihe keine Cauchy-Folge ist, konvergiert sie demnach auch nicht.

(e) Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und setzen $n = n_0$ und $m = 2n_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= \left|\sum_{k=1}^{2n_0} \frac{1}{k^s} - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k^s}\right| = \left|\sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k^s}\right| \geq \left|\sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{(2n_0)^s}\right| \geq \left|\sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{2n_0}\right|\\
&= \left|\frac{n_0}{2n_0}\right| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir gebraucht, dass $\frac{1}{k^s} \geq \frac{1}{k}$ für $s \in (-\infty, 1]$. Die Folge konvergiert also nicht.

5.5. Konvergenzradius einer Potenzreihe Berechnen Sie den zur Koeffizientenfolge $c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörigen Konvergenzradius, d. h. den Konvergenzradius der Potenzreihe $z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

(a) $c_k := 1$ (Das entspricht der Potenzreihe $z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, also der geometrischen Reihe.)

(b) **(∗)** $c_k := \frac{1}{k^k}$

(c) $c_k := \frac{k!}{k^k}$

(d) $c_k := k^p$ für $p \in \mathbb{N}$

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 5.2(b)

(e) **(∗)** $c_k := \frac{1}{k!}$ (Das entspricht der Potenzreihe $z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, also der Exponentialreihe.)

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 5.2(c).

(f) Konvergiert die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{k^k}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$?

(g) Gibt es ein $z \in \mathbb{C}$, sodass $|z| > 1$ und die geometrischen Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert?

(h) **(∗)** Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Exponentialreihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$?

Lösung.

(a)

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{1}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

(b)

$$\begin{aligned}\rho &:= \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|k^{-k}|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{k^{-k}}} \\ &= \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} k^{-1}} = \frac{1}{0} = \infty \text{ (Nach der Konvention aus dem Skript).}\end{aligned}$$

(c) Wir schauen mittels Quotientenkriterium, wann die Potenzreihe $z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{k^k} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)!z^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}\frac{k^k}{k!z^k}\right| &= \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{k^k z}{(k+1)^k}\right| = |z|\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \\ &= \frac{|z|}{\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} = \frac{|z|}{\limsup_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \\ &= \frac{|z|}{e}.\end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert also, wenn $|z| < e$ und divergiert, wenn $|z| > e$ ist. Der Konvergenzradius ρ ist also gegeben durch

$$\rho = e.$$

(d)

$$\begin{aligned}\rho &:= \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|k^p|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{k^p}} \\ &= \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}^p} = \frac{1}{(\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{k})^p} = \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\rho &:= \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|\frac{1}{k!}|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{k!}}} \\ &= \frac{1}{0} = \infty \text{ (Nach der Konvention aus dem Skript).}\end{aligned}$$

(f) In Teilaufgabe (c) wurde gezeigt, dass der Konvergenzradius der Koeffizientenfolge $c_k = \frac{k!}{k^k}$ durch die Eulersche Zahl e gegeben ist. Die in der Aufgabenstellung gegebene Folge ist dabei ein Spezialfall der Potenzreihe mit $z = 1$. Da das innerhalb vom Konvergenzradius liegt, konviergiert die Folge.

(g) Nein, nach der Definition vom Konvergenzradius divergiert $z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für alle $|z| > \rho$. Aus Teilaufgabe (a) ist bekannt, dass der Konvergenzradius der gegebenen Folge $\rho = 1$ ist. Daher kann es kein $z \in \mathbb{C}$ geben, sodass die Reihe konvergiert.

(h) Der Konvergenzradius ρ der Exponentialreihe ist gegeben durch $\rho = \infty$. Sie konvergiert also für alle $z \in \mathbb{C}$.

5.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei a_n definiert durch

$$a_n = \begin{cases} 1 + \sqrt{\frac{k}{12k+1}} & n = 3k+1 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{5k^3+k}{k^3+1} & n = 3k+2 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{(-1)^k}{k} & n = 3k+3 \text{ für } k \geq 0. \end{cases}$$

Welche der Aussagen gilt?

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert.

(ii) $\liminf_{n\to\infty} a_n$ existiert.

(iii) $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 + \sqrt{1/12}$

(b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $b_n = \sup_{k\geq n} a_n$, monoton fallend und die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $c_n = \inf_{k\geq n} a_n$, monoton wachsend.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(c) Die Harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ ist

(i) Konvergent

(ii) Divergent

Lösung.

(a) (ii)

(b) (i)

(c) (ii)