Einige (Teil-)Aufgaben sind mit $(*)$ markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

6.1. Konvergenz und Grenzwert von Reihen, Cauchy-Produkt

(a) Wir betrachten die Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gegeben durch die folgende Tabelle:

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 0	11	...
$\varphi(j)$	0	1	2	4	3	5	6	8	10	7	9	11	...

(1 gerade Zahl, 1 ungerade Zahl, 2 gerade Zahlen, 2 ungerade Zahlen, 3 gerade Zahlen, 3 ungerade Zahlen, ...) Zeigen Sie, dass die zur Folge $\left(2^{-\varphi(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe konvergiert, und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(b) $(*)$ Sei $z \in \mathbb{C}$, sodass $|z| < 1$. Zeigen Sie, dass die zur Folge $\left((k+1)z^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe gegen $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ konvergiert.

Tipps: Betrachten Sie das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe für z mit sich selbst. Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

Lösung.

(a) Wir schauen zuerst die Folge $b_k = 2^{-k}$ an. Diese Reihe erfüllt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |2^{-k}| = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

und ist somit absolut summierbar. Die Funktion φ ist eine Permutation der natürlichen Zahlen. Aus dem Satz über die absolute Summierbarkeit und Umordnung folgt also, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\varphi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2.$$

(b) Wir folgen dem Tipp und berechnen das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe $(a_k := z^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit sich selbst.

$$(a * a)_k = \sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} z^j z^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} z^k = (k+1)z^k.$$

Die absolute Konvergenz der geometrischen Reihe wurde schon in der Vorlesung gezeigt, also sind alle Annahman for den Satz über das Cauchy-Produkt zweier Reihen erfüllt. Dann folgt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k = \sum_{k=0}^{\infty}(a*a)_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \frac{1}{(1+z)^2}.$$

6.2. Eulersche Zahl und Exponentialfunktion

Erinnern Sie sich, dass die Eulersche Zahl definiert ist durch

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

und dass die Exponentialfunktion definiert ist durch

$$\exp := \mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass

$$e = \exp(1).$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, ..., n\}$ sei

$$a_k^{(n)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{n^k}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $0 \leq a_k^{(n)} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, ..., n\}$, und dass für fixes $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}a_k^{(n)}.$$

Schliessen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \exp(1).$$

Hinweis: *Benutzen Sie den binomischen Lehrsatz.*

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

$\exists\, n_\varepsilon^0, n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$, mit $n_\varepsilon^0 \leq n_\varepsilon^1$, sodass $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > \exp(1) - \varepsilon,$$

und $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} (1 - a_k^{(n)}) \leq \varepsilon.$$

(d) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon^1$

$$\left|\exp(1) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right| < 2\varepsilon.$$

(e) Schliessen Sie, dass

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(1).$$

Lösung.

(a) Wir beginnen, indem wir die obere und untere Grenze für $a_k^{(n)}$ zeigen:

- **Untere Grenze:** Da $k \in \{1, \dots, n\}$ und somit $k \leq n$, sind alle Terme in Zähler von $a_k^{(n)}$ positiv. Da der Nenner auch positiv ist, ist auch $a_k^{(n)} \geq 0$.
- **Obere Grenze:**

$$a_k^{(n)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n} \leq \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n}{n} = 1.$$

Um den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 1$ zu zeigen berechnen wir

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n} \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \lim_{n\to\infty} \frac{n-i}{n} = \prod_{i=0}^{k-1} 1 = 1.\end{aligned}$$

(b) Wir benützen den binomischen Lehrsatz und bekommen

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}a_k^{(n)}.\end{aligned}$$

Aus Teilaufgabe (a) ist bekannt, dass $a_k^{(n)} \leq 1$ und somit gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}a_k^{(n)} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \exp(1).$$

(c) **Erster Teil:** Wir wissen aus derVorlesung, dass die Exponentialreihe konvergiert und $\exp(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}$. Die definition der Konvergenz besagt, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!} - \exp(z)\right| < \varepsilon.$$

Daraus folgt direkt, dass

$$\varepsilon > \left|\exp(1) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \exp(1) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Durch umformen kommen wir mit $n_\varepsilon^0 = n_0$ auf das Resultat in der Aufgabenstellung.

Zweiter Teil: In Teilaufgabe (a) haben wir gezeigt, dass $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 1$ ist. Für jedes $\varepsilon' > 0$ existiert also ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass für jedes $n \geq n_0$

$$\left|1 - a_k^{(n)}\right| \leq \varepsilon'.$$

Dies gilt insbesondere auch für $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{n_\varepsilon^0+1}$. Es existiert also ein $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}_0$, sodass für jedes $n \geq n_\varepsilon^1$ gilt, dass

$$\left|1 - a_k^{(n)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{n_\varepsilon^0 + 1}.$$

Wir schätzen somit ab, dass

$$\sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0}(1 - a_k^{(n)}) \leq \sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0}|1 - a_k^{(n)}| \leq \sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0}\frac{\varepsilon}{n_\varepsilon^0 + 1} = \varepsilon.$$

(d) Wegen der Ungleichung aus Teilaufgabe (b) kann der Absolutwert weggelassen werden.

$$\begin{aligned}\left|\exp(1) - \left(1 + \frac{1}{n})\right)^n\right| &= \exp(1) - \left(1 + \frac{1}{n})\right)^n \le \sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \left(1 + \frac{1}{n})\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_k^{(n)} \\ &= \varepsilon + \sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} \frac{1 - a_k^{(n)}}{k!} - \sum_{k=n_\varepsilon^0+1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{k!} \\ &\le \varepsilon + \varepsilon - \sum_{k=n_\varepsilon^0+1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{k!} \le 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass im Restterm $\sum_{k=n_\varepsilon^0+1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{k!}$ alle Summanden positiv sind. Ausserdem wissen wir, dass der Wert des gesamten Ausdrucks nicht negativ werden kann.

(e) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $n_0 = n^1_{\varepsilon/2}$. Dann gilt laut Teilaufgabe (d) für alle $n \ge n_0$, dass

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \exp(1)\right| \le \varepsilon.$$

Das bedeutet, dass $\exp(1)$ das Limit der Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n \to \infty$ ist und somit

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(1).$$

6.3. Stetigkeit

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir definieren die *Projektion auf die i-te Koordinatenachse* als die Funktion

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{pr}_i(x) := x_i.$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung stetig ist.

(b) **(∗)** Zeigen Sie, dass die folgende Funktion stetig ist:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \exp\Big(x \cos\big(\sin(x) + x\big)\Big).$$

Tipps: Verwenden Sie Sätze und Beispiele aus der Vorlesung.

(c) Zeigen Sie dass Addition komplexer Zahlen, d. h. die Abbildung $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, stetig ist.

(d) Beweisen Sie den folgenden Satz:

Seien $n, n', n'' \in \mathbb{N}_0$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$, $S'' \subseteq \mathbb{R}^{n''}$, $f : S \to S'$, $g : S' \to S''$ Funktionen und $x_0 \in S$ ein Punkt, sodass f in x_0 stetig ist und g in $f(x_0)$ stetig ist. Dann ist die verknüpfte Funktion $g \circ f : S \to S''$ in x_0 stetig.

Tipp: Verwenden Sie die Definition der Stetigkeit (Weierstraßsches (ε, δ)-Kriterium).

Bemerkung: Dieser Satz wurde in der Vorlesung behandelt.

Lösung.

(a) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta = \varepsilon$. Seien $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ jetzt beliebig mit $\|x - x_0\| \leq \delta$. Dann folgt

$$\| \operatorname{pr}_i(x) - \operatorname{pr}_i(x_0)\|^2 = |x_i - (x_0)_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - (x_0)_i|^2 = \|x - x_0\|^2 \leq \delta^2 = \varepsilon^2$$

und somit auch $\| \operatorname{pr}_i(x) - \operatorname{pr}_i(x_0)\| \leq \varepsilon$.

(b) Die Funktionen $x \mapsto \sin(x)$ und $x \mapsto x$ sind wie in der Vorlesung gesehen stetig. Die Addition von zwei Funktionen ist auch stetig, also ist $x \mapsto \sin(x) + x$ stetig. Da die Komposition zweier stetiger Funktionen stetig ist und $x \mapsto \cos(x)$ stetig ist, ist auch $x \mapsto \cos(\sin(x) + x)$ stetig. Stetigkeit ist auch unter Multiplikation erhalten, also ist auch $x \mapsto x\cos(\sin(x) + x)$ stetig. Zum Schluss benützen wir noch, dass $x \mapsto \exp(x)$ stetig ist um zu zeigen, dass $f(x) = \exp(x\cos(\sin(x)+x))$ stetig ist.

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Dann wählen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Für $x, y \in \mathbb{C}^2$ mit $\|x - y\| \leq \delta$ gilt dann

$$|(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)| = |x_1 + x_2 - y_1 - y_2| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leq 2\delta = \varepsilon.$$

(d) Wir definieren $x_0' := f(x_0)$. Sei $\varepsilon > 0$. Da g stetig ist existiert ein $\delta' > 0$, sodass für alle $x' \in S'$ mit $\|x' - x_0'\| \leq \delta'$ gilt, dass

$$\|g(x') - g(x_0')\| \leq \varepsilon.$$

Wegen der Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in S$ mit $\|x - x_0\| \leq \delta$ gilt, dass

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \delta'.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\|x - x_0\| \leq \delta &\Rightarrow \|x' - x_0'\| = \|f(x) - f(x_0)\| \leq \delta' \\ &\Rightarrow \|g(f(x)) - g(f(x_0))\| = \|g(x') - g(x_0')\| \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

was die Stetigkeit der Komposition von f und g beweist.

6.4. Inneres

Bestimmen Sie das Innere jeder der folgenden Mengen:

(a) $\mathbb{R}^n$

(b) $\emptyset$

(c) $\{0\}$

(d) **(∗)** abgeschlossener Ball $\overline{B}_r^n(x_0)$ für $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \in (0, \infty)$

(e) $\mathbb{Q}$

Welche dieser Mengen sind offen?

Lösung.

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $B_1(x) \subseteq \mathbb{R}^n$. Also ist $\operatorname{Int} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

(b) Das innere einer Menge kann nur Punkte der ursprüngloichen Menge enthalten. Da $\emptyset$ keine Punkte enthält ist $\operatorname{Int} \emptyset = \emptyset$.

(c) Für alle $r > 0$ ist $\frac{r}{2} \in B_r(0)$. Also gilt für alle $r > 0$, dass $B_r(0) \nsubseteq \{0\}$. Also ist $\operatorname{Int}\{0\} = \emptyset$.

(d) Wir unterteilen den abgeschlossenen Ball in die zwei Mengen $\overline{B}_r^n(x_0) = B_r^n(x_0) \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = r\}$ und behandeln die Punkte in den zwei Mengen nacheinander:

- **Menge 1:** Sei $x \in B_r^n(x_0)$ gegeben. Wir wählen $\varepsilon = r - \|x - x_0\|$. Damit gilt für alle $x' \in B_\varepsilon^n(x)$, dass

$$\|x' - x_0\| = \|x' - x + x - x_0\| \leq \|x' - x\| + \|x - x_0\| < \varepsilon + \|x - x_0\| = r$$

  und deshalb $x' \in \overline{B}_r^n(x_0)$. Somit haben wir gezeigt, dass $B_r^n(x_0) \subseteq \operatorname{Int} \overline{B}_r^n(x_0)$ ist.

- **Menge 2:** Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = r$ gegeben. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir definieren

  $$x' := x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}.$$

  Es gilt, dass

  $$\|x' - x\| = \frac{\varepsilon}{2}$$

  und somit $x' \in B^n_\varepsilon(x)$. Ausserdem gilt, dass

  $$\|x' - x_0\| = \left\| x - x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \right\| = \left\| \frac{2\|x - x_0\| + \varepsilon}{2\|x - x_0\|}(x - x_0) \right\| = \frac{2\|x - x_0\| + \varepsilon}{2\|x - x_0\|} \|x - x_0\| > \|x - x_0\|$$

  Somit ist für alle x und für alle $\varepsilon > 0$ $B^n_\varepsilon(x) \nsubseteq \overline{B}^n_r(x_0)$. Also gehört die zweite Teilmenge nicht zum Inneren.

  Wir schliessen, dass $\operatorname{Int} \overline{B}^n_r(x_0) = B^n_r(x_0)$.

- Wir nehmen einen beliebigen Punkt $x \in \mathbb{Q}$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach dem Archimedischen Prinzip gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Die Zahl $x + \frac{1}{n}$ ist in $\mathbb{Q}$ und es gilt, dass $(x, x + \frac{1}{n}) \subseteq B_\varepsilon(x)$. Da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in den reellen Zahlen ist, existiert ein $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sodass $r \in (x, x + \frac{1}{n})$. Also ist x nicht im Inneren der Menge $\mathbb{Q}$. Wir sehen also, dass $\operatorname{Int} \mathbb{Q} = \emptyset$.

6.5. abgeschlossener Ball (∗)

Zeigen Sie, dass jeder abgeschlossene Ball abgeschlossen ist.

Tipps:

- Machen Sie eine Zeichnung.
- Verwenden Sie die Dreiecksungleichung für die euklidische Norm.

Lösung. Sei $r > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir nehmen das Komplement des abgeschlossenen Balles $\mathbb{R} \setminus \overline{B}^n_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x - x_0\| > r\} =: A$. Sei nun $x \in A$. Wir wählen $\varepsilon = \|x - x_0\| - r$. Dann folgt mit $x' \in B^n_\varepsilon(x)$, dass

$$\|x' - x_0\| \geq \|x' - x_0 - x' + x\| - \|x - x'\| > \|x - x_0\| - \varepsilon = r.$$

Also ist $x' \in B_\varepsilon(x)$. Das bedeutet, dass A offen ist und per Definition ist $\overline{B}^n_r(x_0)$ abgeschlossen.

Die folgende Aufgabe werden wir verwenden, um Aufgabe 6.7 zu lösen.

6.6. De Morgansche Gesetze Zeigen Sie die De Morganschen Gesetze, welche das Folgende besagen:

1. Das Komplement eines Durchschnittes von Mengen ist gleich der Vereinigung der Komplemente der Mengen. Bedeutung: Seien X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Kollektion von Teilmengen von X. Dann gilt

$$\left(\bigcap \mathcal{A}\right)^{\complement} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \left(A^{\complement}\right), \qquad A^{\complement} := X \setminus A.$$

2. Das Komplement einer Vereinigung von Mengen ist gleich dem Durchschnitt der Komplemente der Mengen. Bedeutung: Seien X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Kollektion von Teilmengen von X. Dann gilt

$$\left(\bigcup \mathcal{A}\right)^{\complement} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \left(A^{\complement}\right).$$

Tipp: Schreiben Sie die Mengen unter Verwendung von Quantoren und der Negation. Verwenden Sie die Regeln für logische Aussagen und Quantoren, insbesondere die Regeln für die Negation.

Lösung.

- **Erstes Gesetz:** Sei $x \in \left(\bigcap \mathcal{A}\right)^{\complement}$. Dann gilt per Definition des Komplements:

$$x \notin \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Das bedeutet, dass x in mindestens einer der Mengen $A \in \mathcal{A}$ nicht enthalten ist, also

$$\exists A \in \mathcal{A} \text{ mit } x \notin A.$$

Dies wiederum bedeutet, dass

$$x \in A^{\complement} \text{ für ein } A \in \mathcal{A}.$$

Da x in einem der Komplemente enthalten ist, folgt:

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{\complement}.$$

Umgekehrt: Sei $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{\complement}$. Dann existiert mindestens ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A^{\complement}$, was bedeutet, dass

$$x \notin A.$$

Daher ist x nicht in jeder Menge $A \in \mathcal{A}$ enthalten und somit auch nicht in $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. Also gilt

$$x \in \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \right)^{\complement}.$$

Da wir gezeigt haben, dass $\left(\bigcap \mathcal{A}\right)^{\complement} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{\complement}$ und $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{\complement} \subseteq \left(\bigcap \mathcal{A}\right)^{\complement}$, folgt die Gleichheit:

$$\left(\bigcap \mathcal{A}\right)^{\complement} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{\complement}.$$

- **Zweites Gesetz:** Sei $x \in \left(\bigcup \mathcal{A}\right)^{\complement}$. Dann gilt per Definition des Komplements:

  $$x \notin \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

  Das bedeutet, dass x in keiner der Mengen $A \in \mathcal{A}$ enthalten ist, also

  $$\forall A \in \mathcal{A} : x \notin A.$$

  Dies wiederum bedeutet, dass

  $$x \in A^{\complement} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

  Da x in jedem Komplement enthalten ist, folgt:

  $$x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^{\complement}.$$

  Umgekehrt: Sei $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^{\complement}$. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}$, dass

  $$x \in A^{\complement},$$

  was bedeutet, dass

  $$x \notin A \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Daher ist x in keiner der Mengen $A \in \mathcal{A}$ enthalten und somit auch nicht in $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. Also gilt

$$x \in \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \right)^{\complement}.$$

Da wir gezeigt haben, dass $\left(\bigcup \mathcal{A}\right)^{\complement} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{\complement}$ und $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{\complement} \subseteq \left(\bigcup \mathcal{A}\right)^{\complement}$, folgt die Gleichheit:

$$\left(\bigcup \mathcal{A}\right)^{\complement} = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{\complement}.$$

Damit sind die De Morganschen Gesetze bewiesen.

Die folgende Aufgabe ist Teil der Aussage eines Korollars in der Vorlesung (Eigenschaften abgeschlossener Mengen).

6.7. Eigenschaften abgeschlossener Mengen

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. $\emptyset$ und $\mathbb{R}^d$ sind abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$.
2. Jeder Durchschnitt abgeschlossener Mengen [1] ist abgeschlossen.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Eigenschaften offener Mengen) sowie Aufgabe 6.6.

Lösung. Um die Eigenschaften abgeschlossener Mengen zu zeigen, beweisen wir die beiden Aussagen separat.

1. **Aussage 1:** Eine Menge ist abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist. In $\mathbb{R}^d$ ist das Komplement von $\emptyset$ die gesamte Menge $\mathbb{R}^d$, und $\mathbb{R}^d$ ist offen in sich selbst. Somit ist $\emptyset$ abgeschlossen.

   Analog ist das Komplement von $\mathbb{R}^d$ die leere Menge $\emptyset$, die ebenfalls offen ist. Daher ist $\mathbb{R}^d$ abgeschlossen.

   Damit haben wir gezeigt, dass $\emptyset$ und $\mathbb{R}^d$ abgeschlossen sind.

[1] Damit meinen wir den Durchschnitt einer beliebigen nicht leeren Kollektion (=Menge) von abgeschlossenen Mengen. Diese Kollektion kann unendlich viele Elemente besitzen.

2. **Aussage 2:** Sei $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Kollektion (d.h., eine Menge) von abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}^d$.

   Da jede Menge A_i abgeschlossen ist, ist ihr Komplement $A_i^{\complement}$ offen (nach Definition einer abgeschlossenen Menge).

   Der Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} A_i$ hat das Komplement

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcup_{i\in I} A_i^{\complement}.$$

   (Dies folgt aus dem ersten De Morganschen Gesetz, siehe Aufgabe 6.6).

   Da $A_i^{\complement}$ offen ist für jedes $i \in I$ und die Vereinigung einer beliebigen Anzahl offener Mengen ebenfalls offen ist, ist $\bigcup_{i\in I} A_i^{\complement}$ offen.

   Das Komplement des Durchschnitts $\bigcap_{i\in I} A_i$ ist somit offen, was bedeutet, dass $\bigcap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen ist.

   Damit ist gezeigt, dass jeder Durchschnitt abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen ist.

6.8. Abschluss Bestimmen Sie den Abschluss jeder der folgenden Mengen:

(a) **(∗)** offener Ball $B_r^n(x_0)$ für $r \in (0, \infty)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Tipp: Argumentieren Sie analog zum Beispiel der Menge $]0, 1]$, das in der Vorlesung behandelt wurde.

(b) $\left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

(c) $\left\{ \left(\frac{1}{n}, (-1)^n \right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

(d) $\mathbb{Q}$

Lösung.

(a) **Behauptung:** $\overline{B_r^n(x_0)} = \overline{B}_r^n(x_0)$.

Beweis: Wir erinnern uns an die Definition für den Abschluss einer Menge S

$$\overline{S} := \bigcap_{A \in \mathbb{R}^n \text{ abg.}: S \subseteq A} A.$$

Mit $S = B_r^n(x_0)$ ist eine der Mengen in diesem Durchschnitt gegeben durch $A_0 = \overline{B}_r^n(x_0)$, da $S = B_r^n(x_0) \subseteq \overline{B}_r^n(x_0) = A_0$. Also wissen wir, dass

$$\overline{B_r^n(x_0)} \subseteq \overline{B}_r^n(x_0).$$

Sei jetzt $x \in S_r^n(x_0)$. Jeder offene Ball $B_\varepsilon^n(x)$ um x schneidet die Menge $B_r^n(x_0)$. Jede offene Menge, die x enthält schneidet daher die Menge $B_r^n(x_0)$. Sei jetzt A eine abgeschlossene Obermenge von $B_r^n(x_0)$. Dann ist $A^\complement = \mathbb{R}^n \setminus A$ offen. Da $A^\complement$ die Menge $B_r^n(x_0)$ nicht schneidet, folgt, dass $x \notin A^\complement$, d.h. $x \in A$. Da $B_r^n(x_0) \subseteq A$ folgt daraus, dass $\overline{B}_r^n(x_0) = B_r^n(x_0) \cup S_r^n(x_0) \subseteq A$. Es gilt daher

$$\overline{B}_r^n(x_0) \subseteq \bigcap_{A \in \mathbb{R}^n \text{ abg.}: B_r^n(x_0) \subseteq A} A = \overline{B_r^n(x_0)}.$$

Aus beiden diesen Aussagen zusammen ($\overline{B_r^n(x_0)} \subseteq \overline{B}_r^n(x_0)$ und $\overline{B}_r^n(x_0) \subseteq \overline{B_r^n(x_0)}$) folgt nun, dass

$$\overline{B_r^n(x_0)} = \overline{B}_r^n(x_0).$$

(b) Wir definieren $Y := \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$. Den Abschluss dieser Menge werden wir mit dem Folgenkriterium herleiten. Man beachte, dass $x_n = \frac{1}{n}$ eine Folge in Y mit Grenzwert 0 ist, also ist $0 \in \overline{Y}$. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in Y. Entweder nimmt x_n nur endlich viele verschiedene Werte an, und konvergiert somit gegen einen Punkt in Y, oder x_n nimmt unendlich viele verschiedene Werte an, und somit muss für jedes $N \in \mathbb{N}$ irgendwann $x_n \leq \frac{1}{N}$ gelten, also konvergiert x_n gegen 0. Der Abschluss der Menge Y ist also gegeben durch

$$\overline{Y} = Y \cup \{0\}.$$

(c) Auch hier definieren wir $Y := \left\{\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ und werden den Abschluss mit dem Folgenkriterium berechnen. Wir definieren zwei Folgen $\left(a_n := \left(\frac{1}{2n}, 1\right)\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\left(b_n := \left(\frac{1}{2n+1}, -1\right)\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Die Menge Y ist gegeben durch $Y = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \cup \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Beachte, dass die Folge a_n gegen $(0,1)$ konvertiert und die Folge b_n gegen $(0,-1)$ konvergiert. Mit der selben Argumentation wie in Teilaufgabe (b) lässt sich argumentieren, dass dies und die Werte in Y die einzigen Grenzwerte einer Folge in Y sein können. Somit gilt, dass

$$\overline{Y} = Y \cup \{(0,1), (0,-1)\}.$$

(d) Man bemerke, dass zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Folge von rationalen Zahlen existiert, die gegen x konvergiert. Dies kann man zum Beispiel sehen, indem man x als Dezimalzahl schreibt und x_n definiert als die ersten n Stellen dieser Dezimalzahl. Dann ist $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle n und $x_n \to x$. Es gilt also, dass

$$\overline{Y} = \mathbb{R}.$$

6.9. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei

$$A := \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\overline{A}$ (Abschluss von A in $\mathbb{R}$).

(i) $\overline{A} = \mathbb{R}$

(ii) $\overline{A} = A$

(iii) $\overline{A} = A \cup \{1\}$

(iv) $\overline{A} = [0, 1]$

(b) Sei

$$A := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left(0, \frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Bestimmen Sie $\overline{A}$ (Abschluss von A in $\mathbb{R}^2$).

(i) $\overline{A} = \mathbb{R}^2$

(ii) $\overline{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

(iii) $\overline{A} = A$

(c) Sei

$$A := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y| \leq x^3 \right\}.$$

Bestimmen Sie $\overline{A}$ (Abschluss von A in $\mathbb{R}^2$).

(i) $\overline{A} = \mathbb{R}^2$

(ii) $\overline{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y| < x^3 \right\}$

(iii) $\overline{A} = A$

(iv) $\overline{A} = A \cup \{(0, 0)\}$