

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (*) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

7.1. offene Mengen

(a) Zeichnen Sie die folgenden Mengen:

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} : |x - n| < \frac{1}{n} \right\}$$
$$U' := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (1, 0)\| < 2 \wedge \|x - (-1, 0)\| < 2 \right\}$$

(b) (*) Zeigen Sie, dass die Mengen U und U' offen sind.

Tip: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

Lösung.

(a) Lösung folgt später.

(b) Die Menge U kann auch geschrieben werden als

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - n| < \frac{1}{n} \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n} \right).$$

Eine Eigenschaft offener Mengen ist, dass jede Vereinigung offener Mengen auch offen ist. Die Menge U ist eine Vereinigung offener Intervalle und ist somit offen.

Die Menge U' lässt sich schreiben als

$$U' = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (1, 0)\| < 2 \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (-1, 0)\| < 2 \right\} = B_2^2((1, 0)) \cap B_2^2((-1, 0)).$$

Das ist ein Durchschnitt endlich vieler offener Mengen und somit offen.

Die folgenden drei Aufgaben wurden teilweise schon in Serie 6 gestellt. Inzwischen haben wir den entsprechenden Stoff in der Vorlesung behandelt.

7.2. abgeschlossene Mengen

(a) (*) Zeigen Sie, dass jeder abgeschlossene Ball abgeschlossen ist.

Tipps:

- Machen Sie eine Zeichnung.
- Verwenden Sie die Dreiecksungleichung für die euklidische Norm.

(b) Zeichnen Sie die folgende Menge:

$$A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (1, 0)\| \leq 2 \vee \|x - (-1, 0)\| \leq 2\}$$

(c) Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $a \leq b$. Zeigen Sie, dass das Intervall $[a, b]$ abgeschlossen ist, indem Sie das Folgenkriterium für Abgeschlossenheit verwenden.

Tipp: Verwenden Sie auch, dass die Ordnung zwischen zwei reellen Zahlenfolgen im Limes erhalten bleibt. Das bedeutet Folgendes: Seien $A, B \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen A konvergiert, und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen B konvergiert. Wir nehmen an, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $a_n \leq b_n$. Dann gilt $A \leq B$.

Lösung.

(a) Sei $r > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir nehmen das Komplement des abgeschlossenen Balles $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| > r\} =: A$. Sei nun $x \in A$. Wir wählen $\varepsilon = \|x - x_0\| - r$. Dann folgt mit $x' \in B_\varepsilon(x)$, dass

$$\|x' - x_0\| \geq \|x' - x_0 - x' + x\| - \|x - x'\| > \|x - x_0\| - \varepsilon = r.$$

Also ist $x' \in B_r(x_0)$. Das bedeutet, dass A offen ist und per Definition ist $\overline{B}_r(x_0)$ abgeschlossen.

(b) **Lösung folgt später.**

(c) Die Menge A lässt sich schreiben als

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (1, 0)\| \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (-1, 0)\| \leq 2\} = \overline{B}_2((1, 0)) \cup \overline{B}_2((-1, 0)).$$

Das ist eine Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen und somit abgeschlossen.

(d) Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine beliebige konvergente Folge in $[a, b]$ mit Grenzwert C . Also gilt $a \leq c_n \leq b \forall n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren eine zweite Folge $(d_n := b)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Da die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konstant ist konvergiert sie gegen b . Mit der Aussage aus dem Tipp (mit $a_n = c_n$ und $b_n = d_n$) folgern wir nun, dass $C \leq b$. Mit der exakt selben Argumentation finden wir auch, dass $C \geq a$ und somit $C \in [a, b]$ ist. Nach dem Folgenkriterium für Abgeschlossenheit ist das Intervall $[a, b]$ also abgeschlossen.

Die folgende Aufgabe ist Teil der Aussage eines Korollars in der Vorlesung (Eigenschaften abgeschlossener Mengen).

7.3. Eigenschaften abgeschlossener Mengen

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. $\emptyset$ und $\mathbb{R}^d$ sind abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$.
2. Jeder Durchschnitt abgeschlossener Mengen ¹ ist abgeschlossen.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Eigenschaften offener Mengen) sowie eine Aufgabe aus Übungsserie 6 (De Morgansche Gesetze).

Lösung. Um die Eigenschaften abgeschlossener Mengen zu zeigen, beweisen wir die beiden Aussagen separat.

1. **Aussage 1:** Eine Menge ist abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist. In $\mathbb{R}^d$ ist das Komplement von $\emptyset$ die gesamte Menge $\mathbb{R}^d$, und $\mathbb{R}^d$ ist offen in sich selbst. Somit ist $\emptyset$ abgeschlossen.

Analog ist das Komplement von $\mathbb{R}^d$ die leere Menge $\emptyset$, die ebenfalls offen ist. Daher ist $\mathbb{R}^d$ abgeschlossen.

Damit haben wir gezeigt, dass $\emptyset$ und $\mathbb{R}^d$ abgeschlossen sind.

2. **Aussage 2:** Sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Kollektion (d.h., eine Menge) von abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}^d$.

Da jede Menge A_i abgeschlossen ist, ist ihr Komplement A_i^c offen (nach Definition einer abgeschlossenen Menge).

Der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} A_i$ hat das Komplement

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

(Dies folgt aus dem ersten De Morganschen Gesetz, siehe Serie 6.)

Da A_i^c offen ist für jedes $i \in I$ und die Vereinigung einer beliebigen Anzahl offener Mengen ebenfalls offen ist, ist $\bigcup_{i \in I} A_i^c$ offen.

Das Komplement des Durchschnitts $\bigcap_{i \in I} A_i$ ist somit offen, was bedeutet, dass $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen ist.

¹Damit meinen wir den Durchschnitt einer beliebigen nicht leeren Kollektion (=Menge) von abgeschlossenen Mengen. Diese Kollektion kann unendlich viele Elemente besitzen.

Damit ist gezeigt, dass jeder Durchschnitt abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen ist.

7.4. Abschluss Bestimmen Sie den Abschluss jeder der folgenden Mengen:

- (a) (*) offener Ball $B_r^n(x_0)$ für $r \in (0, \infty)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Tipp: Argumentieren Sie analog zum Beispiel der Menge $]0, 1]$, das in der Vorlesung behandelt wurde.

- (b) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

- (c) $\left\{ \left(\frac{1}{n}, (-1)^n \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

- (d) $\mathbb{Q}$

Lösung.

- (a) **Behauptung:** $\overline{B_r^n(x_0)} = \overline{B_r^n}(x_0)$.

Beweis: Wir erinnern uns an die Definition für den Abschluss einer Menge S

$$\overline{S} := \bigcap_{A \in \mathbb{R}^n \text{ abg. : } S \subseteq A} A.$$

Mit $S = B_r^n(x_0)$ ist eine der Mengen in diesem Durchschnitt gegeben durch $A_0 = \overline{B_r^n}(x_0)$, da $S = B_r^n(x_0) \subseteq \overline{B_r^n}(x_0) = A_0$. Also wissen wir, dass

$$\overline{B_r^n(x_0)} \subseteq \overline{B_r^n}(x_0).$$

Sei jetzt $x \in S_r^n(x_0)$. Jeder offene Ball $B_\varepsilon^n(x)$ um x schneidet die Menge $B_r^n(x_0)$. Jede offene Menge, die x enthält schneidet daher die Menge $B_r^n(x_0)$. Sei jetzt A eine abgeschlossene Obermenge von $B_r^n(x_0)$. Dann ist $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ offen. Da A^c die Menge $B_r^n(x_0)$ nicht schneidet, folgt, dass $x \notin A^c$, d.h. $x \in A$. Da $B_r^n(x_0) \subseteq A$ folgt daraus, dass $\overline{B_r^n}(x_0) = B_r^n(x_0) \cup S_r^n(x_0) \subseteq A$. Es gilt daher

$$\overline{B_r^n}(x_0) \subseteq \bigcap_{A \in \mathbb{R}^n \text{ abg. : } B_r^n(x_0) \subseteq A} A = \overline{B_r^n}(x_0).$$

Aus beiden diesen Aussagen zusammen $\overline{B_r^n(x_0)} \subseteq \overline{B_r^n}(x_0)$ und $\overline{B_r^n}(x_0) \subseteq \overline{B_r^n}(x_0)$ folgt nun, dass

$$\overline{B_r^n(x_0)} = \overline{B_r^n}(x_0).$$

- (b) Wir definieren $Y := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Den Abschluss dieser Menge werden wir mit dem Folgenkriterium herleiten. Man beachte, dass $x_n = \frac{1}{n}$ eine Folge in Y mit Grenzwert 0 ist, also ist $0 \in \overline{Y}$. Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in Y . Entweder nimmt x_n nur endlich viele verschiedene Werte an, und konvergiert somit gegen einen Punkt in Y , oder x_n nimmt unendlich viele verschiedene Werte an, und somit muss für jedes $N \in \mathbb{N}$ irgendwann $x_n \leq \frac{1}{N}$ gelten, also konvergiert x_n gegen 0. Der Abschluss der Menge Y ist also gegeben durch

$$\overline{Y} = Y \cup \{0\}.$$

- (c) Auch hier definieren wir $Y := \left\{ \left(\frac{1}{n}, (-1)^n \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ und werden den Abschluss mit dem Folgenkriterium berechnen. Wir definieren zwei Folgen $(a_n := (\frac{1}{2n}, 1))_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n := (\frac{1}{2n+1}, -1))_{n \in \mathbb{N}_0}$. Die Menge Y ist gegeben durch $Y = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \cup \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Beachte, dass die Folge a_n gegen $(0, 1)$ konvergiert und die Folge b_n gegen $(0, -1)$ konvergiert. Mit der selben Argumentation wie in Teilaufgabe (b) lässt sich argumentieren, dass dies und die Werte in Y die einzigen Grenzwerte einer Folge in Y sein können. Somit gilt, dass

$$\overline{Y} = Y \cup \{(0, 1), (0, -1)\}.$$

- (d) Man bemerke, dass zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Folge von rationalen Zahlen existiert, die gegen x konvergiert. Dies kann man zum Beispiel sehen, indem man x als Dezimalzahl schreibt und x_n definiert als die ersten n Stellen dieser Dezimalzahl. Dann ist $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle n und $x_n \rightarrow x$. Es gilt also, dass

$$\overline{Y} = \mathbb{R}.$$

7.5. Rand Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen ihren Rand:

(a) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $\mathbb{Q}$

Tipp: Verwenden Sie Aufgaben aus Serie 6 und 7, in denen das Innere und der Abschluss dieser Mengen teilweise bestimmt wurde.

Lösung.

- (a) Wir definieren $Y := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Der Rand ist gegeben durch den Abschluss ohne inneres. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist $a_n := \frac{1}{n} \in Y$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt nun, dass

$$\frac{1}{n} + \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2n(n+1)} \right\} \in B_\varepsilon(a_n)$$

und

$$\frac{1}{n} + \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2n(n+1)} \right\} \notin Y.$$

Der Punkt a_n ist also nicht im Inneren von Y und $\text{Int } Y = \emptyset$. Dann ist

$$\partial Y = \overline{Y} \setminus \text{Int } Y = (Y \cup \{0\}) \setminus \emptyset = Y \cup \{0\}.$$

- (b) In Serie 6 haben wir gesehen, dass $\text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset$ und die vorherige Aufgabe in dieser Serie hat gezeigt, dass $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Also ist

$$\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \text{Int } \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}.$$

7.6. Konvergenz und Grenzwert einer Funktion an einer Stelle

Bestimmen Sie für jede der unteren Funktionen das Folgende:

1. ob sie an der angegebenen Stelle x_0 konvergiert
2. den Grenzwert im Fall von Konvergenz
3. ob die Funktion an der Stelle x_0 stetig ist im Fall, dass die Funktion in diesem Punkt definiert ist

(a) (*) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x_0 := 0$

(b) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{-\frac{1}{x}}, \quad x_0 := 0$

(c) halbe Buckelfunktion:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}, \quad x_0 := 0$$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := (x_1 - 1)^2 + x_2^2, \quad x_0 := (1, 0)$

Für $i = 1, 2$ bezeichnet hier x_i die i -te Komponente von x .

(e) $g \circ f$, wobei f wie in (d) und g wie in (c) definiert sind, $x_0 := (1, 0)$

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(f) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{x}, \quad x_0 := 0$

(g) charakteristische Funktion der rationalen Zahlen,

$$f := \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 := \sqrt{2}$$

Lösung.

(a) Wir wählen $y_0 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann wählen wir $\delta = \varepsilon$. Sei nun $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|x| \leq \delta$. Dann folgt, dass

$$|f(x) - y_0| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \leq \delta = \varepsilon.$$

Die Funktion konvergiert also an der Stelle $x_0 = 0$ gegen 0. Die Funktion ist an dieser Stelle nicht definiert, also können wir auch nicht für Stetigkeit in diesem Punkt testen.

- (b) Wir wählen $y_0 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann wählen wir $\delta > 0$, sodass $e^{-\frac{1}{\delta}} \leq \varepsilon$. Sei nun $x \in (0, \infty)$ mit $|x| \leq \delta$. Dann folgt aus der Monotonie der Exponentialfunktion, dass

$$|f(x) - y_0| = e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{|x|}} \leq e^{-\frac{1}{\delta}} \leq \varepsilon.$$

Die Funktion konvergiert also an der Stelle $x_0 = 0$ gegen $y_0 = 0$. Die Funktion ist bei $x_0 = 0$ nicht definiert, also können wir auch nicht die Stetigkeit in diesem Punkt testen.

- (c) Wir wählen die selben Parameter wie in Teilaufgabe (b). Dieses mal braucht es aber eine Fallunterscheidung, weil x auch negativ sein kann. Der Fall $x > 0$ ist analog zu Teilaufgabe (b). Im Fall, dass $x \leq 0$ ist gilt

$$|g(x) - y_0| = |0 - 0| = 0 \leq \varepsilon.$$

Die Funktion konvergiert also an der Stelle $x_0 = 0$ gegen $y_0 = 0$. Aus dem ε - δ -Kriterium für die Konvergenz der Funktion folgt auch direkt, dass sie an diesem Punkt stetig ist, da

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| \leq \varepsilon.$$

- (d) Der Punkt $x_0 = (1, 0)$ liegt im Definitionsbereich von f . Ausserdem ist die Funktion eine Verknüpfung von stetigen Funktionen und somit selbst stetig. Insbesondere auch im Punkt x_0 . Aus den Bemerkungen im Skript zum Grenzwert und Grenzwert einer Funktion folgt daraus, dass f im Punkt x_0 konvergiert und der Grenzwert $y_0 = f(x_0) = 0$ ist.

- (e) Auch hier ist die Verknüpfung der beiden Funktionen g und f stetig im Punkt $x_0 = (1, 0)$, weil g stetig in $f(x_0) = 0$ und f stetig in $x_0 = (1, 0)$ ist. Aus den Bemerkungen im Skript zum Grenzwert und Grenzwert einer Funktion folgt daraus, dass die Verknüpfung im Punkt $x_0 = (1, 0)$ konvergiert und der Grenzwert durch $y_0 = g(f(x_0)) = g(0) = 0$ gegeben ist.

- (f) Divergenz einer Funktion $f : X \rightarrow Y$ im Punkt $x_0 \in \overline{X}$ wird charakterisiert

durch

f div. in x_0

$$\Leftrightarrow \neg(f \text{ konvergiert in } x_0)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\exists y_0 \in Y \forall \varepsilon \in (0, \infty) \exists \delta \in (0, \infty) \forall x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta \rightarrow \|f(x) - y_0\| \leq \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \forall y_0 \in Y \neg(\forall \varepsilon \in (0, \infty) \exists \delta \in (0, \infty) \forall x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta \rightarrow \|f(x) - y_0\| \leq \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \forall y_0 \in Y \exists \varepsilon \in (0, \infty) \neg(\exists \delta \in (0, \infty) \forall x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta \rightarrow \|f(x) - y_0\| \leq \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \forall y_0 \in Y \exists \varepsilon \in (0, \infty) \forall \delta \in (0, \infty) \neg(\forall x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta \rightarrow \|f(x) - y_0\| \leq \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \forall y_0 \in Y \exists \varepsilon \in (0, \infty) \forall \delta \in (0, \infty) \exists x \in X : \neg(\|x - x_0\| \leq \delta \rightarrow \|f(x) - y_0\| \leq \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \forall y_0 \in Y \exists \varepsilon \in (0, \infty) \forall \delta \in (0, \infty) \exists x \in X : (\|x - x_0\| \leq \delta \wedge \|f(x) - y_0\| > \varepsilon).$$

Sei nun $y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig gegeben. Wir wählen $\varepsilon = |y_0|$. Sei nun $\delta > 0$ gegeben. Dann wählen wir ein $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ mit $\frac{1}{|x|} > 2|y_0|$. Es gilt, dass

$$|f(x) - y_0| = \left| \frac{1}{x} - y_0 \right| \geq \left| \frac{1}{x} - y_0 + y_0 \right| - |y_0| = \frac{1}{|x|} - |y_0| > 2|y_0| - |y_0| = |y_0| = \varepsilon.$$

Wir haben also gezeigt, dass die gegebene Funktion f in $x_0 = 0$ nicht konvergiert.

- (g) Auch diese Funktion konvergiert nicht in $x_0 = \sqrt{2}$. Um das zu sehen sei $y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Sei nun $\delta > 0$ gegeben. Nach dem Archimedisches Prinzip existieren $n, m \in \mathbb{N}$, sodass $n > \frac{1}{\delta}$ und $|m - n\sqrt{2}| \leq 1$. Wir wählen nun $x = \frac{m}{n}$, falls $|y_0| \leq \frac{1}{2}$ und $x = x_0$, falls $|y_0| > \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$|x - x_0| = \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| = \frac{|m - n\sqrt{2}|}{|n|} \leq \delta$$

und

$$|f(x) - y_0| = |\chi_{\mathbb{Q}}(x) - y_0| \geq |\chi_{\mathbb{Q}}(x) - y_0 - \chi_{\mathbb{Q}}(x)| - |-\chi_{\mathbb{Q}}(x)| = |y_0| - \chi_{\mathbb{Q}}(x) \geq \varepsilon,$$

was die Behauptung, dass die gegebene Funktion nicht konvergiert beweist.

7.7. Kompaktheit Bestimmen Sie für jede Menge, ob sie kompakt ist:

(a) $\emptyset$

(b) $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (1, 0)\| \leq 2 \vee \|x - (-1, 0)\| \leq 2\}$

Tipp: Verwenden Sie eine andere Übungsaufgabe.

(c) (*) die Sphäre $S_r^{n-1}(x_0)$ für $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \in (0, \infty)$

(d) $\mathbb{Z}$

(e) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

(f) $\{(e^x, \cos(x)) \mid x \in [0, 1]\}$

Lösung.

(a) In Aufgabe 7.3 haben wir gezeigt, dass $\emptyset$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ist. Wir haben auch, dass $\emptyset \subseteq \overline{B}_r^n(x_0)$. Also ist $\emptyset$ kompakt.

(b) In Aufgabe 7.2)c) wurde gezeigt, dass diese Menge abgeschlossen ist. Es gilt ausserdem, dass

$$\|x\| = \|x - (1, 0) + (1, 0)\| \leq \|x - (1, 0)\| + \|(1, 0)\| \leq 2 + 1 = 3$$

für die erste Bedingung und

$$\|x\| = \|x - (-1, 0) + (-1, 0)\| \leq \|x - (-1, 0)\| + \|(-1, 0)\| \leq 2 + 1 = 3$$

für die zweite Bedingung. Also wissen wir, dass

$$\|x\| \leq 3$$

und daher $x \in \overline{B}_3^2(0)$. Zusammen mit der Abgeschlossenheit heisst das, dass A kompakt ist.

(c) Es gilt natürlich, dass $S_r^{n-1}(x_0) \subseteq \overline{B}_r^n(x_0)$. Ausserdem haben wir, dass

$$S_r^{n-1}(x_0) = \overline{B}_r^n(x_0) \setminus B_r^n(x_0) = \overline{B}_r^n(x_0) \cap B_r^n(x_0)^c.$$

Dies ist ein endlicher Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen und somit selbst eine abgeschlossene Menge. Die Sphäre ist also kompakt.

(d) $\mathbb{Z}$ ist zwar abgeschlossen, weil $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ offen ist, allerdings existiert nach dem Archimedischen Prinzip für jedes $r > 0$ ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $|z| > r$. Also ist $\mathbb{Z}$ nicht beschränkt und somit auch nicht kompakt.

- (e) In Aufgabe 7.4 haben wir gesehen, dass $\mathbb{Q}$ nicht abgeschlossen ist. Die selbe Argumentation lässt sich verwenden um zu zeigen, dass auch $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ nicht abgeschlossen ist. Somit ist $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ auch nicht kompakt.
- (f) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (e^x, \cos(x))$ ist stetig. Die gegebene Menge ist also das Bild der kompakten Menge $[0, 1]$ unter einer stetigen Abbildung und somit auch kompakt.

7.8. (*) Maximum und Minimum einer Funktion Wir betrachten die Funktion

$$f : \overline{B}_1^2(0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{x_1} + x_2.$$

Zeigen Sie, dass f ein Maximum und ein Minimum besitzt.

Tipp: Verwenden Sie Resultate aus der Vorlesung.

Lösung. Die Funktion f ist eine Verknüpfung stetiger Funktionen (Für ie Projektion $x \mapsto x_1$ wurde das in der letzten Serie gezeigt). Ausserdem ist f auf einer kompakten Menge (dem abgeschlossenen Ball) definiert. Nach dem Korollar über stetige Funktionen auf kompakten Mengen besitzt f also ein Maximum und ein Minimum.

7.9. Mittels (Un-)gleichungen definierte Mengen

Tipp für (a) und (b): Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Charakterisierung von Stetigkeit mittels (relativ) offener und abgeschlossener Mengen).

- (a) (*) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + e^x < 2\}$$

offen ist.

- (b) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen abgeschlossen sind:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + e^x \leq 2\}$$

$$B := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + e^x = 2\}$$

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + x + y^4 + y = 1\}$$

- (c) Zeigen Sie, dass A, B und C kompakt sind.

- (d) Ist die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x + y^3 + y = 1\}$$

kompakt?

Lösung.

- (a) Die Menge ist das Urbild der Menge $(-\infty, 2)$ unter der Funktion $f(x) := x^2 + e^x$. Da diese Funktion stetig ist und das Urbild offener Mengen unter stetigen Abbildungen auch offen ist, ist die gegebene Menge offen.
- (b) Sei f wie in Teilaufgabe (a) und definieren wir $g(x, y) := x^4 + x + y^4 + y$. Dann ist

$$A = f^{-1}((-\infty, 2])$$

$$B = f^{-1}(\{2\})$$

$$C = g^{-1}(\{1\}).$$

Da das Urbild stetiger Abbildungen die Offenheit und Geschlossenheit erhält, f und g beide stetig sind, und für alle drei Funktionen die Mengen (relativ) abgeschlossen sind, sind auch A , B und C abgeschlossen.

- (c) **Lösung folgt später.**

- (d) Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x + y^3 + y = 1\}$ ist zwar abgeschlossen, aber sie ist nicht beschränkt. Dies kann man wie folgt zeigen. Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $h(x) = x^3 + x$. Dann gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$. Das Bild von h ist also ganz $\mathbb{R}$. Somit existiert für jedes $y \in \mathbb{R}$, egal wie gross $|y|$ ist, ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $h(x) = 1 - y^3 - y$. Der Punkt (x, y) liegt dann in der Menge. Da also $\|(x, y)\| \geq |y|$ beliebig gross sein kann, ist die Menge unbeschränkt.

7.10. Umgebung eines Punktes

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge $U := [0, 1]$ eine Umgebung des Punktes $x_0 := 1$ in (= relativ zu) $X :=]-1, 1]$ ist.
- (b) Ist $[0, 1]$ eine Umgebung des Punktes $x_0 := 1$ in $\mathbb{R}$?
- (c) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x^5 + x \leq 1\}$$

eine Umgebung des Punktes $x_0 := 0$ in $\mathbb{R}$ ist.

Lösung.

- (a) Wir wählen $r = 1$. Dann ist

$$B_r^1(x_0) \cap (-1, 1] = (0, 2) \cap (-1, 1] = (0, 1] \subseteq [0, 1] = U.$$

(b) Sei $r > 0$ gegeben. Dann ist

$$B_r^1(x_0) \cap \mathbb{R} = (1 - r, 1 + r) \not\subseteq [0, 1].$$

Egal wie klein r also gewählt ist, die Bedingung, dass $[0, 1]$ eine Umgebung von $x_0 = 1$ in $\mathbb{R}$ ist kann nie erfüllt werden. Wir schliessen, dass $[0, 1]$ keine Umgebung von $x_0 = 1$ in $\mathbb{R}$ ist.

(c) Wir definieren $f(x) := x^5 + x$. Also ist die angegebene Menge

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq f(x) \leq 1\} = f^{-1}([-1, 1]).$$

Die Menge $[-1, 1]$ ist eine Umgebung von 0 in $\mathbb{R}$, weil für $r = 1$

$$B_r^1(0) \cap \mathbb{R} = (-1, 1) \subseteq [-1, 1].$$

Nach dem Umgebungskriterium ist $f^{-1}([-1, 1])$ eine Umgebung von $x_0 = f(0) = 0$.

7.11. (*) Bild einer Funktion, Zwischenwertsatz Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^5 + x + 1.$$

Zeigen Sie, dass das Bild von f gegeben ist durch $\text{im}(f) = [1, \infty)$.

Tipp: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz.

Lösung. Wir zeigen die Gleichheit in zwei Schritten.

Schritt 1: Inklusion $\text{im}(f) \subseteq [1, \infty)$

Für jedes $x \geq 0$ ist $f(x) \geq 1$. Die Inklusion folgt direkt daraus.

Schritt 2: Inklusion $[1, \infty) \subseteq \text{im}(f)$

Sei $y \in [1, \infty)$. Da $y \geq 1$ gilt

$$f(0) = 1 \leq y \leq y^5 + y + 1 = f(y).$$

Also ist $y \in [f(0), f(y)]$. Da f stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x \in [0, y]$ gibt, sodass $f(x) = y$. Da $[0, y] \subseteq [0, \infty)$ folgt daraus, dass $y \in f([0, \infty)) = \text{im}(f)$.

Beide Inklusionen kombiniert resultieren in

$$[1, \infty) = \text{im}(f).$$

7.12. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jede monotone Funktion $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ist stetig.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(b) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jede stetige, surjektive Funktion $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ist monoton.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(c) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Es existiert eine surjektive stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow]c, d[$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(d) Ist die folgende Funktion stetig?

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) := \begin{cases} -x & \text{wenn } x < 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ x & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$

(i) Ja

(ii) Nein

Lösung.

(a) (ii)

(b) (ii)

(c) (ii)

(d) (i)