

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(*)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

8.1. Exponentialfunktion streng monoton wachsend Zeigen Sie, dass die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

Tipps: Verwenden Sie:

- Additionstheorem für die Exponentialfunktion
- Für jedes $y \in (0, \infty)$ gilt $\exp(y) > 1$. (Warum?)

Lösung. Seien $x, x' \in \mathbb{R}$, sodass $x < x'$. Gemäss einem Korollar aus der Vorlesung (Additionstheorem) gilt

$$\exp(x) \exp(-x + x') = \exp(x'). \quad (1)$$

Da $-x + x' > 0$, gilt

$$\exp(-x + x') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x + x')^k}{k!} \geq \frac{(-x + x')^0}{0!} + \frac{(-x + x')^1}{1!} > 1.$$

Mittels (1) folgt daraus, dass $\exp(x) < \exp(x')$. Also ist $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

Die folgende Aufgabe ist ein Korollar in der Vorlesung (zum Additionstheorem für die Exponentialfunktion).

8.2. Produktregel für den Logarithmus Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in (0, \infty)$ gilt, dass

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

Tip: Verwenden Sie das Additionstheorem für die Exponentialfunktion.

Lösung. Seien $x, y \in (0, \infty)$. Wir schreiben

$$x' := \log(x), \quad y' := \log(y).$$

Da $\exp \circ \log = \text{id}$, haben wir

$$\begin{aligned} \log(xy) &= \log(\exp(x') \exp(y')) \\ &= \log(\exp(x' + y')) \quad (\text{Additionstheorem für Exp}) \\ &= x' + y' \quad (\text{da } \log \circ \exp = \text{id}) \\ &= \log(x) + \log(y). \end{aligned}$$

8.3. Umkehrfunktion eines eingeschränkten Polynoms ist stetig. Wir betrachten die Funktion

$$f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^5 - x.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, das Bild von f zu bestimmen und zu zeigen, dass die Umkehrfunktion der Funktion $f : [1, 2] \rightarrow \text{im}(f)$ stetig ist.

(a) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.

Tipps: Verwenden Sie, dass $x^5 - x = x(x^4 - 1)$.

(b) Überlegen Sie sich, dass f injektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass das Bild von f gleich $[0, 30]$ ist.

Tipps: Verwenden Sie die erste Teilaufgabe und einen Satz aus der Vorlesung.

(d) (*) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion der Funktion $f : [1, 2] \rightarrow [0, 30]$ stetig ist.

Bemerkung: Da die Funktion $f : [1, 2] \rightarrow [0, 30]$ bijektiv ist, ist ihre Umkehrfunktion wohldefiniert.

Tipps: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

Bemerkung: Mit einer *Formel* meinen wir einen Ausdruck, der rationale Zahlen, die Variable x , die Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und k -te Wurzeln für beliebige $k \in \mathbb{N}$ enthält. Ein Beispiel dafür ist

$$\sqrt[5]{x^2 + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \frac{2}{x^4 + 1}}}$$

(Potenzen sind auch zugelassen, da wir zum Beispiel $x^2 = x \cdot x$ schreiben können.) Es gibt keine Formel für f^{-1} . Das folgt aus *Galoistheorie*, einem Teilgebiet der Algebra. Wir können also manchmal zeigen, dass eine bestimmte Funktion stetig ist (zum Beispiel die hier betrachtete Umkehrfunktion f^{-1}), selbst wenn es keine Formel für die Funktion gibt.

Lösung.

- (a) Die Funktionen $[1, 2] \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$, $[1, 2] \ni x \mapsto x^4 - 1 \in \mathbb{R}$ sind streng monoton wachsend. Da $f(x) = x(x^4 - x)$, folgt daraus, dass die Funktion f streng monoton wachsend ist. Wir verwenden hierbei, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper ist, d. h. die Eigenschaften A.i)-iv), M.i)-iv), D), O.i)-iv), K.i),ii) im Skript *Analysis für Informatik* (Prof. M. Struwe), Abschnitt 2.2 *Die reellen Zahlen*, besitzt.
- (b) Da f streng monoton wachsend ist, ist f injektiv. (Überlegen Sie sich das!)
- (c) Sei $x \in [1, 2]$. Da f streng monoton wachsend ist, gilt $f(x) \geq f(1) = 0$ und $f(x) \leq f(2) = 30$. Daraus folgt, dass $\text{im}(f) \subseteq [0, 30]$. Sei jetzt $y \in [0, 30]$. Da $0 = f(1)$ und $30 = f(2)$, gilt $y \in [f(1), f(2)]$. Daher gibt es gemäss dem Zwischenwertsatz ein $x \in [1, 2]$, sodass $f(x) = y$. Daraus folgt, dass $[0, 30] \subseteq \text{im}(f)$, also $\text{im}(f) = [0, 30]$.
- (d) Die Funktion $f : [1, 2] \rightarrow [0, 30]$ ist stetig, da sie ein Polynom ist. Ihr Definitionsbereich $[1, 2]$ ist kompakt. Gemäss einem Satz aus der Vorlesung ist ihre Umkehrfunktion daher stetig.

Bemerkung: Alternativ folgt das auch aus folgendem Satz aus der Vorlesung:

Sei I ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig. Dann ist die Umkehrfunktion der Funktion $f : I \rightarrow \text{im}(f)$ streng monoton wachsend und stetig.

8.4. Umkehrfunktion der Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion ist stetig

Wir betrachten die eingeschränkte komplexe Exponentialfunktion

$$f := \text{Exp} := \exp : U := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$
$$x + iy \mapsto \exp(x + iy) \text{ für } (x, y) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi).$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, das Folgende zu zeigen:

- Das Bild von f ist offen.
 - $f : U \rightarrow \text{im}(f)$ besitzt eine Umkehrfunktion.
 - Die Umkehrfunktion ist stetig.
- (a) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

Tip: Verwenden Sie das Folgende:

- Additionstheorem for $\exp$
- eulersche Formel

- Für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ impliziert $\text{cis}(\varphi) = (1, 0)$, dass es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $\varphi = 2\pi k$.

(b) Zeigen Sie, dass das Bild von f offen ist.

(c) (*) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion der Funktion $f : U \rightarrow \text{im}(f)$ stetig ist.

Bemerkung: Die Funktion $f : U \rightarrow \text{im}(f)$ ist surjektiv und daher gemäss der ersten Teilaufgabe bijektiv. Daher ist ihre Umkehrfunktion wohldefiniert.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

Lösung.

- (a) Seien $z, z' \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \subseteq \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = \exp(z')$. Wir benennen $z' - z = x + iy$ (y ist hierbei im offenen Intervall $(-2\pi, 2\pi)$). Dann ist laut dem Additionstheorem $1 = \exp(z' - z) = \exp(x) \exp(iy)$. Da $|\exp(iy)| = 1$ ist, muss $\exp(x) = 1$ sein und daraus folgt wiederum, dass $\exp(iy) = 1$ sein muss. Aus dem Tipp folgt nun, dass $y = 0$ ist. Zusammen mit $\exp(x) = 1$ folgern wir, dass $z' - z = 0$, also $z = z'$ und somit, dass die eingeschränkte komplexe Exponentialfunktion injektiv ist.
- (b) Wir wenden den Satz aus der Vorlesung über die Stetigkeit der Umkehrfunktion bei offenem Definitionsbereich an. Wir wissen, dass die Exponentialfunktion stetig ist und haben in der vorherigen Teilaufgabe gezeigt, dass sie auch injektiv ist. Ausserdem haben wir, dass $n = p$ und die Voraussetzungen aus dem Satz sind somit erfüllt. Nach dem Satz gilt dann, dass das Bild im $f = f(U)$ offen in $\mathbb{R}^2$ ist.
- (c) Die Stetigkeit der Umkehrfunktion folgt direkt aus dem selben Satz wie in der vorherigen Teilaufgabe.

8.5. (*) punktweise Konvergenz Wir betrachten die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$f_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_m(x) := x^m.$$

Zeigen Sie, dass diese Folge *punktweise* gegen die folgende Funktion konvergiert:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1, \\ 1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Lösung. Wir unterscheiden zwischen den zwei Fällen $x < 1$ und $x = 1$. Der Fall $x = 1$ ist einfach, da $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(1) = \lim_{m \rightarrow \infty} 1^m = 1$ ist. Für $x < 1$ gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} x^m = 0$, wobei der Wert vom Limes aus der Konvergenz der geometrischen Reihe folgt.

8.6. gleichmässige Konvergenz, Potenzreihe für den Logarithmus, Riemannsche Zeta-Reihe

- (a) (*) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\left(f_m := \frac{\cos}{m} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ gleichmässig gegen die Funktion $f := 0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.
- (b) Zeigen Sie, dass für jedes $z \in B_1^2(0)$ die Folge $\left(\sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k\right)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Tipp: Verwenden Sie ein Resultat aus der Vorlesung.

- (c) (*) Wir definieren

$$f : B_1^2(0) \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k := \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k.$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Tipp: Verwenden Sie ein Resultat aus der Vorlesung.

Bemerkung: Die Einschränkung der Funktion f auf $(-1, 1)$ ist gegeben durch

$$f(x) = \log(1+x).$$

Das wird im Skript *Analysis für Informatik* von Prof. M. Struwe in Beispiel 6.3.1. bewiesen.

- (d) Wir definieren die (*Riemannsche*) *Zeta-Reihe* als die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Funktionen definiert durch

$$f_m : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_m(s) := \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^s}.$$

Sei $s_0 \in (1, \infty)$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung der Zeta-Reihe auf das Intervall $[s_0, \infty)$ gleichmässig konvergiert.

Tipp: Verwenden Sie, dass die Folge $\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^{s_0}}\right)_{m \in \mathbb{N}_0}$ nach oben beschränkt ist.

Das wird im Skript *Analysis für Informatik* von Prof. M. Struwe in Beispiel 3.7.4. ii) bewiesen.

- (e) Wir definieren die *Riemannsche Zeta-Funktion* $\zeta : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ als den gleichmässigen Limes der Zeta-Reihe. Zeigen Sie, dass ζ stetig ist.

Tipp: Verwenden Sie, dass f_m für jedes m stetig ist, die letzte Teilaufgabe und einen Satz aus der Vorlesung.

Lösung.

- (a) Wir zeigen, dass $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gleichmässig gegen die Funktion $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\cos(x)}{m} - 0 \right| = \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} |\cos(x)|}{m} = \frac{1}{m} \rightarrow 0, \text{ wenn } m \rightarrow \infty.$$

Also konvergiert $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sowohl gleichmässig und auch punktweise gegen f .

- (b) Wir berechnen den Konvergenzradius der Folge als

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1$$

also $\rho = 1$. Die Folge konvergiert also für jedes $z \in \mathbb{R}^2$ mit $|z| < \rho = 1$, was genau dem offenen Ball $z \in B_1^2(0)$ entspricht.

- (c) Die gegebene Funktion ist eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion. Wir wenden das Korollar zum Satz über die Erhaltung der Stetigkeit unter gleichmässiger Konvergenz an, welches besagt, dass jede durch eine Potenzreihe definierte Funktion auf der Konvergenzkreisscheibe stetig ist. Wie in der vorherigen Aufgabe gezeigt, entspricht diese Konvergenzkreisscheibe genau $B_1^2(0)$.
- (d) Aus der Vorlesung ist schon bekannt, dass die Reihe $\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^{s_0}} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ für jedes $s_0 \in (1, \infty)$ konvergiert.

8.7. Differenzierbarkeit, Ableitung, Summe konvergenter Funktionen

- (a) (*) (quadratische Funktion differenzierbar) Seien $a, x_0 \in \mathbb{R}$. Wir definieren $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := ax^2$. Zeigen Sie, dass diese Funktion im Punkt x_0 differenzierbar ist mit Ableitung

$$f'(x_0) = 2ax_0.$$

- (b) (Summe konvergenter Funktionen) Seien $n, p \in \mathbb{N}, X \subseteq \mathbb{R}^n, F, G : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ und $x_0 \in \overline{X}$, sodass F und G an der Stelle x_0 konvergieren. Zeigen Sie, dass die Summe $F + G$ gegen $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} G(x)$ konvergiert.

Tipps:

- Sei $\varepsilon \in (0, \infty)$. Wir wählen eine Zahl α , welche die Rolle von δ in der Definition der Konvergenz von F an der Stelle x_0 spielt. Auf ähnliche Weise wählen wir ein β für G . Konstruieren Sie aus α und β ein δ , dass seinen Zweck für $F + G$ und 2ε erfüllt. Passen Sie jetzt Ihre Wahl so an, dass δ seinen Zweck für $F + G$ und ε erfüllt.
 - Verwenden Sie die Dreiecksungleichung.
- (c) (Summe differenzierbarer Funktionen) Seien $p \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ und $x_0 \in U$, sodass f und g an der Stelle x_0 differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass die Summe $f + g$ an der Stelle x_0 differenzierbar ist.

Tipp: Verwenden Sie die letzte Teilaufgabe.

- (d) (*) (Differenzierbarkeit) Gibt es einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, in dem $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen, differenzierbar ist?

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

Lösung.

- (a) (*) Der Differenzenquotient von f zu x_0 ist durch die Funktion $F : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{ax^2 - ax_0^2}{x - x_0} \\ &= \frac{a(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= a(x + x_0) \end{aligned}$$

gegeben. Die Funktion F konvergiert im Punkt x_0 zum Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = 2ax_0$. Es gilt also, dass $f'(x) = 2ax$.

- (b) Da wir wissen, dass F und G beide an der Stelle x_0 konvergieren wissen wir, dass zu jeder beliebigen positiven reellen Zahl ein α und ein β wie im Tipp beschrieben existiert. Insbesondere auch für $\frac{\varepsilon}{2}$. Wir wählen $\alpha, \beta > 0$ also so, dass für alle $x_\alpha, x_\beta \in X$ mit $|x_\alpha - x_0| < \alpha$ und $|x_\beta - x_0| < \beta$ gilt, dass

$$\begin{aligned} |F(x_\alpha) - F(x_0)| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ |G(x_\beta) - G(x_0)| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

wobei wir die Grenzwerte als $F(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$ und $G(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} G(x)$ bezeichnet haben. Nun wählen wir $\delta = \min(\alpha, \beta)$. Dann gilt für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass

$$|F(x) + G(x) - F(x_0) - G(x_0)| \leq |F(x) - F(x_0)| + |G(x) - G(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Die Summe von F und G ist im Punkt x_0 also auch konvergent und konvergiert gegen $F(x_0) + G(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} G(x)$.

- (c) Da f und g an der Stelle x_0 differenzierbar sind wissen wir, dass ihre Differenzenquotienten $F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ und $G(x) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ an der Stelle x_0 konvergieren. Laut der letzten Teilaufgabe konvergiert die Summe der beiden Differenzenquotienten also gegen die Summe der Ableitungen von f und g . Es gilt also, dass

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} G(x) \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

- (d) (*) Aus der Vorlesung wissen wir, dass Differenzierbarkeit in x_0 Stetigkeit in x_0 impliziert. Da die charakteristische Funktion auf den rationalen Zahlen in keinem Punkt stetig ist, kann sie auch nicht differenzierbar sein.

8.8. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

- (a) Welche der folgenden Funktionen besitzen eine stetige Inverse?

- (i) $f : [0, \pi] \rightarrow [0, 1], f(x) = \sin(x)$
- (ii) $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1], f(x) = \sin(x)$
- (iii) $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin(x)$
- (iv) $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin(x)$

Lösung.

- (a) (ii) und (iv)