Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

9.1. Differenzierbarkeit, Ableitungen, Summen-, Produkt-, Quotienten-, Kettenregel, Umkehrsatz Zeigen Sie, dass jede der folgenden Funktionen differenzierbar ist. Berechnen Sie ihre Ableitung.

(a) **(∗)** (reelle Exponentialfunktion) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Tipps:

- Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$. Wir bezeichnen mit $\widetilde{Q}(h)$ den verschobenen Differenzenquotienten [1] von exp zu x_0, ausgewertet in h. Schreiben Sie $\widetilde{Q}(h)$ mittels des Additionstheorem für die Exponentialfunktion als

$$\widetilde{Q}(h) = \exp(x_0)(1 + a_h h), \qquad a_h := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{h^\ell}{(\ell+2)!}.$$

- Schätzen Sie $|a_h|$ durch eine geometrische Reihe nach oben ab.
- Zeigen Sie, dass $\widetilde{Q}(h) \to \exp(x_0)$ für $h \to 0$.

(b) **(∗)** (Produkt) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := xe^x$

Tipp: Leibnizregel = Produktregel

(c) (Produkt) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x \log x$

Bemerkung: In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass der natürliche Logarithmus $\log :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit Ableitung gegeben durch eine bestimmte Funktion. Sie dürfen das verwenden.

Tipp: Leibnizregel = Produktregel

(d) **(∗)** $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \dfrac{x+1}{x-1}$

Tipp: Quotientenregel

(e) (Potenzfunktion) $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_n(x) := x^n$ für $n \in \mathbb{N}$

Tipps:

- Induktion

[1] siehe Vorlesung

- Für $n = 1$ ist $p_1 = \mathrm{id}$ linear, also affin. Wir haben diesen Fall schon in der Vorlesung behandelt.
- Wenn Sie den allgemeinen Fall zu schwierig finden, betrachten Sie dann zuerst die Fälle $n = 2, 3$.

(f) (Polynom) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

Tipps:

- Teilaufgabe (e)
- Produkt- und Summenregel für Differenzierbarkeit und Ableitungen
- Induktion
- Wenn Sie den allgemeinen Fall zu schwierig finden, betrachten Sie dann zuerst das Polynom $p(x) := 2x^2 + x$.

(g) (Potenzfunktion mit negativem Exponenten) $p_{-n} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $p_{-n}(x) := x^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$

Tipps:

- Teilaufgabe (e)
- Quotientenregel

(h) $\tan := \dfrac{\sin}{\cos} : U \to \mathbb{R}$, wobei

$$U := \mathbb{R} \setminus \left\{ \ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots \right\}$$

Bemerkung: Sie dürfen verwenden, dass die Kosinus- und die Sinusfunktion differenzierbar sind mit Ableitungen gegeben durch bestimmte Funktionen.

Tipp: Verwenden Sie eine Rechenregel für Ableitungen.

(i) **(∗)** (gaußsche Glockenfunktion) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$

Tipp: Kettenregel

(j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{e^{e^x}} := e^{\left(e^{(e^x)}\right)}$

Tipp: Kettenregel

(k) (Exponentialfunktion zur Basis $b \in]0,\infty[$) $:= \exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp_b(x) := b^x := \exp\Big(x\log(b)\Big) = e^{x\log(b)}$

Tipps:

- Kettenregel
- Leibnizregel = Produktregel
- Teilaufgabe (a)

(l) **(∗)** n-te Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\ } :]0,\infty[\to]0,\infty[$ für $n \in \mathbb{N}$

Tipps:

- Umkehrsatz
- Teilaufgabe (e)

(m) **(∗)** (Logarithmus zur Basis $b \in]1,\infty[$) $:= \log_b := \exp_b^{-1} := \exp_b^{\langle -1\rangle} : \mathrm{im}(\exp_b) =]0,\infty[\to \mathbb{R}$

Überlegen Sie sich zuerst, dass $\exp_b : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ bijektiv ist.

Bemerkung: Sie dürfen dazu verwenden, dass $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ bijektiv ist.

Tipps:

- Umkehrsatz
- Teilaufgabe (k)

(n) *Arkustangens* := (Umkehrfunktion des Tangens $\tan : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$) $= \arctan := \tan^{\langle -1\rangle} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Überlegen Sie sich zuerst, dass $\tan : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

Tipps:

- Umkehrsatz
- Teilaufgabe (h)
- Schreiben Sie $\tan'$ in der Form $\tan' = \varphi \circ \tan$ für eine bestimmte Funktion φ.

Lösung.

(a) Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$. Wir bezeichnen mit $\widetilde{Q}$ den verschobenen Differenzenquotienten von exp zu x_0. Gemäss einem Beispiel in der Vorlesung (geometrische Reihe) gilt

$$\left(\sum_{\ell=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \to \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Da $|h| \leq \frac{1}{2}$, gilt $\frac{h^\ell}{(\ell+2)!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell}$. Daraus folgt, dass die Reihe $\left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{h^\ell}{(\ell+2)!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert mit Grenzwert

$$a_h := \lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{h^\ell}{(\ell+2)!} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell} = 2. \tag{1}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} - 1}{h} &= 1 + \left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{h^\ell}{(\ell+2)!}\right) h \quad (\ell \text{ spielt die Rolle von } k-2.) \\ &\to 1 + a_h h \qquad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{\exp(h) - 1}{h} = 1 + a_h h. \tag{2}$$

(Warum?) Es gilt:

$$\exp(x_0 + h) = \exp(x_0)\exp(h) \qquad \text{(gemäss dem Additionstheorem)} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}(h) &= \frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} \\ &= \exp(x_0)\frac{\exp(h)-1}{h} \qquad \text{(wegen (3))} \\ &= \exp(x_0)(1 + a_h h) \qquad \text{(gemäss (2))} \\ &\to \exp(x_0) \qquad \text{für } h \to 0 \qquad \text{(wegen (1))} \end{aligned}$$

Also ist exp an der Stelle x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$\exp'(x_0) = \exp(x_0).$$

(b) Wir definieren die beiden Funktionen $g(x) = x$ und $h(x) = e^x$. Dann ist $f(x) = g(x)h(x)$. Mittels der Produktregel folgt, dass

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x.$$

(c) Wir definieren die beiden Funktionen $g(x) = x$ und $h(x) = \log(x)$. Dann ist $f(x) = g(x)h(x)$. Mittels der Produktregel folgt, dass

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 1 \cdot \log(x) + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \log(x).$$

(d) Wir definieren die beiden Funktionen $g(x) = x + 1$ und $h(x) = x - 1$. Dann ist $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Mittels der Produktregel folgt, dass

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2} = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

(e) **Behauptung:** $p_n'(x) = nx^{n-1}$.

Induktionsbasis: $n = 1$. Dann ist $p_n'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $p_n'(x) = nx^{n-1}$. Dann ist mit der Produktregel

$$p_{n+1}'(x) = \frac{d}{dx}(x^{n+1}) = \frac{d}{dx}(x \cdot x^n) = \frac{d}{dx}(x) \cdot x^n + x \cdot \frac{d}{dx}(x^n) = x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

(f) **Behauptung:** DieAbleitung ist gegeben durch

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} ka_k x^{k-1}.$$

Wir beweisen die Formel durch vollständige Induktion über den Grad n des Polynoms.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $p(x) = a_0$, ein konstantes Polynom. Die Ableitung ist

$$p'(x) = 0,$$

was mit der Summenschreibweise $\sum_{k=1}^{n} ka_k x^{k-1}$ übereinstimmt, da die Summe leer ist.

Induktionsvoraussetzung: Sei die Formel für ein Polynom vom Grad n richtig:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \implies p'(x) = \sum_{k=1}^{n} ka_k x^{k-1}.$$

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass die Formel auch für ein Polynom vom Grad $n+1$ gilt. Sei

$$q(x) = p(x) + a_{n+1}x^{n+1},$$

wobei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom vom Grad n ist. Die Ableitung von $q(x)$ ist

$$q'(x) = p'(x) + \frac{d}{dx}(a_{n+1}x^{n+1}).$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt für $p'(x)$:

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

Die Ableitung des neuen Terms $a_{n+1}x^{n+1}$ ist:

$$\frac{d}{dx}(a_{n+1}x^{n+1}) = (n+1)a_{n+1}x^n.$$

Zusammen ergibt sich:

$$q'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} + (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{k=1}^{n+1} k a_k x^{k-1}.$$

Damit ist die Formel auch für $n+1$ bewiesen.

(g) Wir schreiben x^{-n} als den Kehrwert von x^n und bekommen mit der Quotientenregel

$$p'_{-n}(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = \frac{\frac{d}{dx}1 \cdot x^n - 1 \cdot \frac{d}{dx}x^n}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

(h) Wir verwenden, dass $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$. Dann folgt aus der Quotientenregel, dass

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \tan^2(x).\end{aligned}$$

(i) Wir definieren $g(x) = e^x$ und $h(x) = -\frac{x^2}{2}$. Dann ist $f(x) = g(f(x))$ und somit

$$f'(x) = h'(x)g'(f(x)) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(j) Wir wenden die Kettenregel mehrere male an und bekommen

$$f'(x) = \frac{d}{dx}e^{e^{e^x}} = \left(\frac{d}{dx}e^{e^x}\right)e^{e^{e^x}} = \left(\left(\frac{d}{dx}e^x\right)e^{e^x}\right)e^{e^{e^x}} = e^x e^{e^x} e^{e^{e^x}}.$$

(k) Wir definieren $f(x) = e^x$ und $g(x) = x\log(b)$. Dann ist $b^x = f(g(x))$ und mit der Kettenregel folgt, dass

$$\frac{d}{dx}b^x = \frac{d}{dx}f(g(x)) = g'(x)f'(g(x)) = \log(b)e^{x\log(b)} = \log(b)b^x.$$

(l) Die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend. Wir können also den Umkehrsatz anwenden. $\sqrt[n]{}$ ist die Umkehrfunktion von $f(x) = x^n$. Die Ableitung ist also gegeben durch

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{f'(\sqrt[n]{x})} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}.$$

(m) Wir zeigen zuerst die Bijektivität der Exponentialfunktion zur Basis b.

1. Surjektivität: Für jedes $y \in]0,\infty[$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $\exp_b(x) = b^x = y$. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass b^x für $x \to -\infty$ gegen 0 strebt und für $x \to \infty$ gegen ∞ divergiert. Da $\exp_b$ stetig und streng monoton wachsend ist, nimmt sie jeden Wert in $]0,\infty[$ genau einmal an.

2. Injektivität: Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $\exp_b(x_1) = \exp_b(x_2)$. Dann gilt $b^{x_1} = b^{x_2}$. Wegen $b > 1$ und der Monotonie von b^x folgt $x_1 = x_2$. Damit ist $\exp_b$ injektiv.

Da $\exp_b$ sowohl injektiv als auch surjektiv ist, ist sie bijektiv.

Wegen dier Bijektivität von $\exp_b$ können wir den Umkehrsatz verwenden um die Ableitung vom Logarithmus zur Basis b zu berechnen:

$$\log_b'(x) = \frac{1}{\exp_b'(\exp_b^{-1}(x))} = \frac{1}{\log(b)\exp_b(\log_b(x))} = \frac{1}{\log(b)x}.$$

(n) Wir zeigen zunächst die Bijektivität vom Tangens auf dem Interval $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Surjektivität:

Wir müssen zeigen, dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ existiert, sodass $\tan(x) = y$. Der Tangens ist auf $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton wachsend, und seine Grenzwerte sind:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \infty.$$

Da $\tan(x)$ stetig ist, nimmt sie durch den Zwischenwertsatz jeden Wert $y \in \mathbb{R}$ genau einmal an. Somit ist tan surjektiv.

2. Injektivität:

Seien $x_1, x_2 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ und $\tan(x_1) = \tan(x_2)$. Wegen der strengen Monotonie von tan folgt $x_1 = x_2$. Damit ist tan injektiv.

Da tan sowohl injektiv als auch surjektiv ist, ist er bijektiv.

Wir wenden also den Umkehrsatz an um die Ableitung zu bestimmen und bekommen

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

9.2. Anwendungen des Mittelwertsatzes: strenge Monotonie, gewöhnliche Differentialgleichung

(a) **($*$)** (Ableitung in einem Punkt) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{x^2} = e^{(x^2)}.$$

Zeigen Sie, dass es eine Zahl $x_0 \in]0,1[$ gibt, sodass $f'(x_0) = e - 1$.

Frage: Können Sie ein solches x_0 berechnen?

Tipp: Falls nicht, verwenden Sie dann einen Satz aus der Vorlesung, der besagt, dass es einen Punkt x_0 gibt, sodass $f'(x_0)$ eine bestimmte Gleichung erfüllt.

(b) **($*$)** (strenge Monotonie) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Potenzfunktion $p_{-n} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $p_{-n}(x) := x^{-n}$, streng monoton fallend ist.

Tipps:

- Korollar zum Mittelwertsatz (verschwindende Ableitung impliziert Konstanz, positive Ableitung strenges Wachstum)
- Aufgabe 1(g)

(c) (gewöhnliche Differentialgleichung) Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir $p_n :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $p_n(x) := x^n$. Sei $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, sodass

$$f' = p_{-1} f, \qquad \text{d. h.} \qquad f'(x) = \frac{f(x)}{x}, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$f = f(1) p_1 \qquad \text{d. h.} \qquad f(x) = f(1)x, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tipp: Argumentieren Sie wie in einem Beispiel in der Vorlesung (Mittelwertsatz, gewöhnliche Differentialgleichung). (Wir haben dort ein Korollar zum Mittelwertsatz angewendet.)

Lösung.

(a) Wir berechnen die Ableitung von f mit der Kettenregel als

$$f'(x) = 2xe^{x^2}.$$

Diese Funktion können wir nicht nach x umformen und somit ist es unmöglich das x zu berechnen. Allerdings ist f eine Verknüpfung von stetigen Funktionen und somit selbst stetig. Gleiches folgt für die Differenzierbarkeit der Funktion. Aus dem Mittelwertsatz folgt also, dass ein $x_0 \in]0,1[$ existiert, sodass

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{e - 1}{1} = e - 1.$$

(b) Die Ableitung der Potenzfunktion ist gegeben durch

$$p'_{-n}(x) = -nx^{-n-1}.$$

Da wegen dem Definitionsbereich von p_{-n} $x > 0$ ist, wissen wir, dass $x^{-n-1} > 0$ und somit $p'_{-n}(x) = -nx^{-n-1} < 0$ ist. Also ist $-p'_{-n}(x) > 0$ und nach dem Korrolar zum Zwischenwertsatz streng monoton wachsend. Und wenn $-p'_{-n}(x)$ streng monoton wachsend ist, muss $p'_{-n}(x)$ streng monoton fallend sein.

(c) Wir definieren

$$g(x) := \frac{1}{x}, \quad h(x) := f(x)g(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad \forall x \in]0, \infty[.$$

Die Funktion $g(x)$ ist nach Aufgabe 9.1)g) differenzierbar mit

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Da $h(x) = f(x)g(x)$ ein Produkt ist, ist $h(x)$ differenzierbar und wir können die Produktregel anwenden:

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} + f(x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Da $h'(x) = 0$, ist $h(x)$ konstant, d.h., es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$h(x) = c, \quad \forall x \in]0, \infty[.$$

Insbesondere gilt:

$$h(1) = c \quad \Rightarrow \quad \frac{f(1)}{1} = c \quad \Rightarrow \quad c = f(1).$$

Da $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ konstant ist, folgt:

$$\frac{f(x)}{x} = f(1), \quad \forall x \in]0, \infty[.$$

Multiplikation mit x liefert:

$$f(x) = f(1)x, \quad \forall x \in]0, \infty[.$$

9.3. Konvergenz des Quotienten zweier Funktionen, "unbestimmter Grenzwert der Form $\frac{0}{0}$", Regel von Bernoulli-de l'Hospital Für jede der folgenden Funktionen $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ zeigen Sie, dass h an der Stelle $x_0 := 0$ von rechts konvergiert und berechnen Sie $\lim_{x \searrow 0} h(x)$.

Tipp: Versuchen Sie, eine der folgenden Methoden anzuwenden:

- Definition der Ableitung
- Quotientenregel für Konvergenz von Funktionen an einer Stelle:

  Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{X}$, sodass f und g an der Stelle x_0 gegen y_0 und z_0 konvergieren und $z_0 \neq 0$. Dann konvergiert $\frac{f}{g}$ an der Stelle x_0 gegen $\frac{y_0}{z_0}$.
- Regel von Bernoulli-de l'Hospital

Bemerkung: Sie dürfen verwenden, dass die Kosinus- und die Sinusfunktion differenzierbar sind mit Ableitungen gegeben durch bestimmte Funktionen.

(a) **(∗)** $h(x) := \dfrac{\sin x}{x}$

(b) **(∗)** $h(x) := \dfrac{x+1}{x^2+1}$

(c) **(∗)** $h(x) := \dfrac{x}{\sin x}$

(d) $h(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

(e) $h(x) := \dfrac{x^2}{e^x - x - 1}$

(f) $h(x) := \dfrac{\cos x}{1+x}$ (Wir definieren diese Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.)

(g) $h(x) := \dfrac{\cos x - 1}{x}$

Lösung.

(a) Für $x \searrow 0$ liegt ein unbestimmter Grenzwert der Form $\frac{0}{0}$ vor. Wir wenden die Regel von Bernoulli-de l'Hospital an:

$$\lim_{x \searrow 0} h(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1.$$

Daher gilt: $\lim_{x \searrow 0} h(x) = 1$.

(b) Der Zähler und Nenner sind an der Stelle $x = 0$ endlich, daher wenden wir die Quotientenregel an:

$$\lim_{x \searrow 0} h(x) = \frac{\lim_{x \searrow 0}(x+1)}{\lim_{x \searrow 0}(x^2+1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Somit ist $\lim_{x \searrow 0} h(x) = 1$.

(c) Auch hier liegt ein unbestimmter Grenzwert der Form $\frac{0}{0}$ vor. Mit der Regel von Bernoulli-de l'Hospital:

$$\lim_{x \searrow 0} h(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(0)} = 1.$$

Somit ist $\lim_{x \searrow 0} h(x) = 1$.

(d) Für $x \searrow 0$ ergibt sich erneut die Form $\frac{0}{0}$. Wir wenden die Regel von Bernoulli-de l'Hospital an:

$$\lim_{x \searrow 0} h(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}.$$

Für $x \searrow 0$ ergibt der Zähler 2 und der Nenner 1, also:

$$\lim_{x \searrow 0} h(x) = \frac{2}{1} = 2.$$

Somit ist $\lim_{x \searrow 0} h(x) = 2$.

(e) Für $x \searrow 0$ ergibt sich wieder die Form $\frac{0}{0}$. Wir wenden zweimal die Regel von Bernoulli-de l'Hospital an:

$$\lim_{x \searrow 0} h(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{2x}{e^x - 1} = \lim_{x \searrow 0} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Somit ist $\lim_{x \searrow 0} h(x) = 2$.

(f) Der Zähler und Nenner konvergieren beide gegen endliche Werte. Wir wenden die Quotientenregel an:

$$\lim_{x \searrow 0} h(x) = \frac{\lim_{x \searrow 0} \cos x}{\lim_{x \searrow 0}(1+x)} = \frac{\cos(0)}{1+0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Somit ist $\lim_{x \searrow 0} h(x) = 1$.

(g) Für $x \searrow 0$ liegt ein unbestimmter Grenzwert der Form $\frac{0}{0}$ vor. Mit der Regel von Bernoulli-de l'Hospital:

$$\lim_{x \searrow 0} h(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{-\sin x}{1} = -\sin(0) = 0.$$

Somit ist $\lim_{x \searrow 0} h(x) = 0$.

9.4. Umkehrsatz

Die Hyperbelfunktionen *Sinus hyperbolicus*, *Cosinus hyperbolicus* und *Tangens hyperbolicus* sind definiert auf $\mathbb{R}$ durch

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ und $\tanh(x)$ auf $\mathbb{R}$.

(b) Sei f eine der obigen Funktionen. Bestimmen Sie

$$I_f = \{x \in \mathbb{R}; f'(x) > 0\}$$

und bemerken Sie, dass für alle drei Funktionen I_f ein Intervall ist.

(c) Skizzieren Sie die Graphen der drei Hyperbelfunktionen.

(d) Benutzen Sie den Umkehrsatz um zu zeigen, dass die drei Hyperbelfunktionen auf den entsprechenden Bereichen I_f bijektiv sind.
Man schreibt die Inverse der Hyperbelfunktionen als

$$\operatorname{arsinh} = (\sinh)^{-1}, \quad \operatorname{arcosh} = (\cosh)^{-1}, \quad \operatorname{artanh} = (\tanh)^{-1}.$$

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche von arsinh, arcosh und artanh.

(e) Bestimmen Sie die Ableitungen von arsinh, arcosh und artanh (als Funktionen der Hyperbelfunktionen und ihren Inversen).

(f) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen arsinh, arcosh und artanh.

Lösung.

(a)

$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x),$$
$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x),$$
$$\tanh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \tanh(x)^2$$

(b) Aus der Teilaufgabe a) sehen wir, dass $\sinh'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also

$$I_{\sinh} = \mathbb{R}.$$

Aus der Formel $\cosh'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ schliessen wir:

$$\cosh'(x) > 0 \leftrightarrow e^x > e^{-x} \leftrightarrow x > 0,$$

also gilt

$$I_{\cosh} = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\} = (0, \infty).$$

Da für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x + e^{-x} > e^x - e^{-x},$$

gilt

$$\tanh(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mit der Formel in Teilaufgabe a) schliessen wir also

$$I_{\tanh} = \mathbb{R}.$$

(c) Eine Skizze der drei Hyperbelfunktionen finden Sie auf Seite 91 im Vorlesungsskript.

(d) Da sinh, cosh und tanh auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, folgt aus dem Umkehrsatz, dass sie auf den entsprechenden Intervallen I_f aus der Teilaufgabe b) invertierbar sind.
Die Definitionsbereiche der Inversen ist die Bildmenge der jeweiligen Funktion auf dem Intervall I_f, also $f(I_f)$.

Da $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$, schliessen wir dank dem Zwischenwertsatz, dass $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Da $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \infty$ und cosh auf dem Intervall $I_{\cosh} = (0, \infty)$ monoton wachsend ist, schliessen wir $\cosh((0, \infty)) = (1, \infty)$.

Es gilt $|e^x - e^{-x}| < e^x + e^{-x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $|\tanh(x)| < 1$ auf $\mathbb{R}$. Da $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$ und $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$, schliessen wir, dass $\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$.

Also gilt:

$$D_{\text{arsinh}} = \mathbb{R}, \quad D_{\text{arcosh}} = (1, \infty), \quad D_{\text{artanh}} = (-1, 1).$$

(e) Aus dem Umkehrsatz folgt, dass

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))},$$

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(x))},$$

und

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{artanh})} = \frac{1}{1 - \tanh(\operatorname{artanh}(x))^2} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

(f) Eine Skizze der Inversen der drei Hyperbelfunktionen finden Sie auf den Wikipedia-Seiten
`https://de.wikipedia.org/wiki/Areasinus_hyperbolicus_und_Areakosinus_hyperbolicus`
und
`https://de.wikipedia.org/wiki/Areatangens_hyperbolicus_und_Areakotangens_hyperbolicus`.

9.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

(a) Sei
$$f := \sin \circ \cos \circ \sin := \sin \circ(\cos \circ \sin) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i) $f'(x) = -\cos(x)\sin(\sin(x))\cos(\cos(\sin(x)))$

(ii) $f'(x) = \cos(x)\sin(x)\cos(x)$

(iii) $f'(x) = -\cos(\sin(-\cos(x)))$

(iv) $f'(x) = -\cos(x)\cos(\sin(x))\sin(\cos(\sin(x)))$

(b) Welche der folgenden Ableitungen sind korrekt? (Mehrere Antworten können korrekt sein)

(i) $\frac{d}{dx}\log(2x) = 2\log(x)\frac{1}{x}, \ \forall x \in]0, \infty[$

(ii) $(\exp \circ \sin)' = (\exp \circ \sin)\cos$

(iii) $\left(\sqrt{\ } \circ \sin\right)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cos(x)}}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die an jeder Stelle in $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Weiter sei $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Dann existiert ein $x \in [0, 1]$ mit $f'(x) = 1$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

Lösung.

(a) (i)

(b) (ii)

(c) (i)