Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

Die folgende Aufgabe ist Teil einer Proposition in der Vorlesung.

10.1. hyperbolische Funktionen Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\cosh(x) = \operatorname{Cos}(ix)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Tipp: Verwenden Sie die eulersche Formel für komplexe Zahlen und die Identitäten $\operatorname{Cos}(-z) = \operatorname{Cos} z$, $\operatorname{Sin}(-z) = -\operatorname{Sin} z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(b) $i \sinh(x) = \operatorname{Sin}(ix)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Tipp: Siehe (a).

(c) ("hyperbolischer Pythagoras") $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(d) (Additionstheorem für cosh) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(e) (Additionstheorem für sinh) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Lösung.

(a) Wir verwenden die Definitionen der hyperbolischen und der trigonometrischen Funktionen sowie die Eulersche Formel. Für $\cosh(x)$ gilt:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Für $\operatorname{Cos}(ix)$ mit der Eulerschen Formel erhalten wir:

$$\operatorname{Cos}(ix) = \frac{e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2}.$$

Es folgt $\cosh(x) = \operatorname{Cos}(ix)$.

(b) Analog verwenden wir die Definitionen von $\sinh(x)$ und $\operatorname{Sin}(ix)$. Für $i \sinh(x)$ gilt:

$$i \sinh(x) = i \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{ie^x - ie^{-x}}{2}.$$

Für $\operatorname{Sin}(ix)$ mit der Eulerschen Formel erhalten wir:

$$\operatorname{Sin}(ix) = \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}}{2i} = \frac{e^{-x} - e^x}{-2i} = \frac{ie^x - ie^{-x}}{2}.$$

Es folgt $i \sinh(x) = \operatorname{Sin}(ix)$.

(c) Aus den Definitionen von $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ ergibt sich:

$$\cosh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4},$$

$$\sinh^2(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}.$$

Subtraktion liefert:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.$$

(d) Aus den Definitionen von $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ ergibt sich:

$$\cosh(x)\cosh(y) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^x e^y + e^x e^{-y} + e^{-x}e^y + e^{-x}e^{-y}}{4}$$

$$\sinh(x)\sinh(y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^x e^y - e^x e^{-y} - e^{-x}e^y + e^{-x}e^{-y}}{4}.$$

Mit $e^{x+y} = e^x e^y$ und $e^{-(x+y)} = e^{-x}e^{-y}$ erhalten wir:

$$\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \frac{2e^x e^y + 2e^{-x}e^{-y}}{4} = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y).$$

(e) Aus den Definitionen von $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ ergibt sich:

$$\sinh(x)\cosh(y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x}e^y - e^{-x}e^{-y}}{4}$$

$$\cosh(x)\sinh(y) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x}e^y - e^{-x}e^{-y}}{4}.$$

Mit $e^{x+y} = e^x e^y$ und $e^{-(x+y)} = e^{-x}e^{-y}$ erhalten wir:

$$\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) = \frac{2e^x e^y - 2e^{-x}e^{-y}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y).$$

10.2. höhere Differenzierbarkeit und Ableitungen (∗) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten die n-te Potenzfunktion $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_n(x) := x^n$. Zeigen Sie, dass p_n für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ k mal differenzierbar ist und berechnen Sie seine k-te Ableitung.

Tipps:

- Aufgabe aus der Vorlesung, die besagt, dass p_n differenzierbar ist und die eine Formel für die Ableitung von p_n angibt.
- Induktion

Lösung. Behauptung: Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist $p_n(x) = x^n$ k-mal differenzierbar mit

$$p_n^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{wenn } k \leq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Induktionsanfang: Für $k = 0$ leiten wir nicht ab und $p_n^{(0)}(x) = x^n$.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, $p_n(x) = x^n$ ist für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ k-mal differenzierbar mit der Ableitung wie in der Behauptung.

Induktionsschritt: Für $k > n$ ist

$$p_n^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} p_n^{(k)}(x) = \frac{d}{dx} 0 = 0,$$

was mit der Behauptung übereinstimmt. Für $k = n$ ist

$$p_n^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} p_n^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \frac{n!}{(n-n)!} x^{n-n} = \frac{d}{dx} n! = 0,$$

was auch mit der Behauptung übereinstimmt. Es bleibt der Fall $k < n$ zu überprüfen:

$$\begin{aligned} p_n^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} p_n^{(k)}(x) = \frac{d}{dx} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{d}{dx} x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) x^{n-k-1} \\ &= \frac{n!}{(n-(k+1))!} x^{n-(k+1)}. \end{aligned}$$

10.3. Polynom, rationale Funktion, Exponentialfunktion, trigonometrische Funktion glatt Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen glatt sind.

Tipps: Verwenden Sie:

- jeweils ein Beispiel aus der Vorlesung, gemäss dem die Funktion differenzierbar ist und das eine Formel für die Ableitung liefert
- Induktion

(a) jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(b) die rationale Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ für jedes Paar von reellen Polynomen $p, q \not\equiv 0$ und $U := q^{-1}\Big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\Big)$

(c) **($*$)** die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(d) die trigonometrischen Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Lösung.

(a) **Behauptung:** Jedes beliebige Polynom p ist k-mal stetig differenzierbar für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und $p^{(k)}(x)$ ist wieder ein Polynom.

Induktionsanfang: Für $k = 0$ gilt natürlich, dass $p^{(0)}(x) = p(x)$ ein Polynom ist.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen $p(x)$ ist k-mal differenzierbar mit Ableitung

$$p^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$.

Induktionsschritt: In Serie 9 wurde gezeigt, dass das Polynom aus der Inuktionsvoraussetzung differenzierbar ist. Wir haben also

$$p^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} p^{(k)}(x) = \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}$$

und somit selbst auch wieder ein Polynom ist. Die Behauptung ist somit bewiesen.

(b) Laut dem Beispiel zur Summen-, Produkt- und Quotientenregel der Ableitung ist die rationale Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und ihre Ableitung ist wieder eine rationale Funktion $f' : U \to \mathbb{R}$. Die Glettheit von rationalen Funktionen folgt daraus mittels Induktion wie in der ersten Teilaufgabe.

(c) Die Exponentialfunktion ist differenzierbar und ihre Ableitung ist wieder die Exponentialfunktion

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Die Glattheit folgt daraus mittels Induktion wie in der ersten Teilaufgabe.

(d) Wir leiten die trigonometrischen Funktionen vier mal ab:

$$\begin{aligned} \cos^{(1)}(x) &= -\sin(x), & \sin^{(1)}(x) &= \cos(x) \\ \cos^{(2)}(x) &= -\cos(x), & \sin^{(2)}(x) &= -\sin(x) \\ \cos^{(3)}(x) &= \sin(x), & \sin^{(3)}(x) &= -\cos(x) \\ \cos^{(4)}(x) &= \cos(x), & \sin^{(4)}(x) &= \sin(x). \end{aligned}$$

Nach vier mal ableiten erreichen wir also wieder die ursprüngliche Funktion. Die Glattheit folgt daraus mittels Induktion wie in der ersten Teilaufgabe.

Die folgende Aufgabe ist Teil eines Satzes, der in der Vorlesung behandelt wurde.

10.4. Ableitungen von Kosinus und Sinus, durch Potenzreihe definierte Funktion ist gliedweise differenzierbar ($*$) Wir definieren

$$\mathrm{Cos}, \mathrm{Sin} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$
$$\mathrm{Cos}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!}, \quad \mathrm{Sin}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

Zeigen Sie, dass die eingeschränkten Funktionen $\mathrm{Cos}\,|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Sin}\,|_{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind mit Ableitungen

$$(\mathrm{Cos}\,|_{\mathbb{R}})' = -\,\mathrm{Sin}\,|_{\mathbb{R}}, \qquad (\mathrm{Sin}\,|_{\mathbb{R}})' = \mathrm{Cos}\,|_{\mathbb{R}}.$$

Tipp: Verwenden Sie ein Korollar aus der Vorlesung (durch Potenzreihe definierte Funktion ist gliedweise differenzierbar).

Bemerkung: In den Vorlesungsnotizen wird die Aussage auf eine andere Weise bewiesen. Wir zeigen dazu mittels der Definition, dass die Funktion $\mathrm{Exp}(i\bullet) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbar ist mit Ableitung $i\,\mathrm{Exp}(i\bullet)$ und verwenden die eulersche Formel.

Lösung.

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$a_k := \begin{cases} \dfrac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!}, & \text{wenn } k = 2\ell+1 \text{ für ein } \ell \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Die Folge $\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Dies folgt aus dem Quotientenkriterium für Reihen. Per Definition ist der Grenzwert der Sinus von x,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sin(x). \tag{1}$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$b_k := \begin{cases} \dfrac{(-1)^\ell}{(2\ell)!}, & \text{wenn } k = 2\ell \text{ für ein } \ell \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Die Folge $\left(\sum_{k=0}^n b_k x^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Dies folgt aus dem Quotientenkriterium für Reihen. Per Definition ist der Grenzwert der Kosinus von x,

$$\sum_{k=0}^\infty b_k x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n b_k x^k = \cos(x). \tag{2}$$

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir haben

$$\frac{k}{k!} = \frac{k}{k(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!},$$

und daher gilt $ka_k = b_{k-1}$. (Überprüfe das!) Es folgt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{m=0}^{n-1} b_m x^m. \tag{3}$$

(Der Index m spielt die Rolle von $k-1$.)

Nach einem Theorem aus der Vorlesung (Potenzreihen sind differenzierbar) konvergiert die Folge $\left(\sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Nach demselben Theorem und (1) ist die Sinusfunktion differenzierbar mit der Ableitung

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} b_m x^m \qquad \text{(unter Verwendung von (3))} \\ &= \cos(x) \qquad \text{(unter Verwendung von (2))}, \end{aligned}$$

wie behauptet.

(b) Dies folgt aus einem ähnlichen Argument wie in Teil ((a)), indem man die Potenzreihe für den Kosinus termweise differenziert. (Mach es!)

10.5. Taylorpolynom, Restglied, Taylorreihe, Abschätzung des Fehlers

(a) Wir betrachten das Polynom $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=1+x+x^2+x^3$.

1) **(∗)** Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^m_{f,x_0=0}$ von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0:=0$, für $m=0,\dots,4$.

2) Berechnen Sie das Restglied $R^{m=1}_{f,x_0=0}$.

3) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0:=0$.

(b) Seien $n,m\in\mathbb{N}_0$ und $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. Wir betrachten das Polynom

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k.$$

1) Berechnen Sie $T^m_{f,x_0=0}$, das Taylorpolynom von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0:=0$.

2) Berechnen Sie das Restglied $R^m_{f,x_0=0}$.

3) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0:=0$.

(c) 1) **(∗)** Für jedes $m\in\mathbb{N}_0$ berechnen Sie das Taylorpolynom $T^m_{\sin,x_0=0}$.

Tipp: Verwenden Sie, dass $\sin=\operatorname{Sin}|_{\mathbb{R}}$ und dass $\operatorname{Sin}|_{\mathbb{R}}$ der punktweise Limes einer Potenzreihe ist.

2) **(∗)** Bestimmen Sie die Taylorreihe von sin zum Entwicklungspunkt $x_0:=0$.

3) Zeichnen Sie sin auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

4) Zeichnen Sie $T^1_{\sin,0}$ und $T^3_{\sin,0}$.

5) Was können Sie über den Fehler der Taylornäherung in diesem Beispiel aus Ihrer Zeichnung ablesen?

6) **(∗)** Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von sin zum Entwicklungspunkt $x_0:=0$ auf dem Intervall $[-1,1]$ gleichmässig gegen sin konvergiert.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (gleichmässige Konvergenz der Taylorreihe gegen Limes einer Potenzreihe).

7) **(∗)** Zeigen Sie, dass es für jedes $x\in]0,\infty[$ einen Punkt $\xi\in]0,\infty[$ gibt, sodass

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{\sin\xi}{24}x^4.$$

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Satz von Taylor, Restglied in Lagrangeform).

8) **(∗)** Zeigen Sie, dass der Fehler der Taylornäherung für sin dritter Ordnung um $x_0 = 0$, also das Restglied $R^3_{\sin,x_0=0}(x) = \sin x - T^3_{\sin,x_0=0}(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, die folgende Abschätzung erfüllt:

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \le \frac{x^4}{24}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

9) Zeigen Sie, dass die Zahl $\frac{5}{6}$ den Wert $\sin 1$ mit einer Genauigkeit von mindestens $\frac{1}{24}$ nähert, d. h.

$$\left|\sin 1 - \frac{5}{6}\right| \le \frac{1}{24}.$$

10) Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon \in]0, \infty[$ ein $\delta \in]0, \infty[$ gibt, sodass gilt:

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \le \varepsilon |x|^3, \qquad \forall x \in [-\delta, \delta].$$

Tipp: Teilaufgabe 8) 8)

Bemerkung: Das bedeutet, dass $T^3_{\sin,x_0=0}$ die Funktion sin in dritter Ordnung um $x_0 = 0$ nähert.

11) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{\sin x - x + \dfrac{x^3}{6}}{x^3}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(d) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^2_{\sin,x_0=\frac{\pi}{2}}$.

(e) Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{x^2}$. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^2_{f,x_0=0}$.

Lösung.

(a) 1)

$$
\begin{aligned}
T^0_{f,x_0=0} &= f(x_0) = 1 \\
T^1_{f,x_0=0} &= f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) = 1 + 1(x-0) = 1+x \\
T^2_{f,x_0=0} &= f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 \\
&= 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2} 2(x-0)^2 = 1 + x + x^2 \\
T^3_{f,x_0=0} &= f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 \\
&= 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2} 2(x-0)^2 + \frac{1}{6} 6(x-0)^3 = 1 + x + x^2 + x^3 \\
T^4_{f,x_0=0} &= f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 \\
&+ \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^4 \\
&= 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2} 2(x-0)^2 + \frac{1}{6} 6(x-0)^3 + \frac{1}{24} 0(x-x_0)^4 \\
&= 1 + x + x^2 + x^3.
\end{aligned}
$$

2)

$$
R^{m=1}_{f,x_0=0} = f - T^1_{f,x_0=0} = 1 + x + x^2 + x^3 - (1+x) = x^2 + x^3.
$$

3) Für $k > 3$ ist $f^{(k)}(x) = 0$. Wir haben also, dass

$$
T_{f,x_0=0} = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (\bullet - x_0)^k \right)_{m \in \mathbb{N}_0} = \left(\sum_{k=0}^{\min\{m,3\}} \bullet^k \right)_{m \in \mathbb{N}_0}.
$$

(b) 1) Die k-te Ableitung von f ist (nach Aufgabe 2) gegeben durch

$$
f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} a_i x^{i-k}.
$$

Für $i > n$ resultiert das in der leeren Summe und die Ableitung nimmt den Wert 0 an. Evaluieren bei $x_0 = 0$ gibt

$$
f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(0) = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} a_i 0^{i-k} = \begin{cases} k! a_k & \text{wenn } k \leq n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Einsetzen in die Formel für das Taylorpolynom gibt

$$T^m_{f,x_0=0} = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \frac{k!a_k}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} a_k x^k.$$

2)

$$R^m_{f,x_0=0} = f - T^m_{f,x_0=0} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} a_k x^k = \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{n} a_k x^k.$$

3)

$$T_{f,x_0=0} = \left(\sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} a_k \bullet^k\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$$

(c) 1) Nach dem Beispiel in der Vorlesung ist das Taylorpolynom m-ter Ordnung einer Potenzreihe gegeben durch die ersten m Terme der Potenzreihe. Da wir haben, dass

$$\sin(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}x^{2j+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

mit

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} & \text{für } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

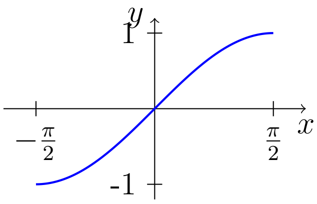
Das Taylorpolynom ist also gegeben durch

$$T^m_{\sin,x_0=0} = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k.$$

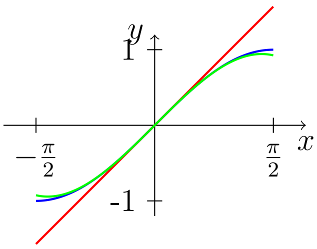
2) Die Taylorreihe ist die Folge von Taylorpolynomen und somit

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\right)_{m\in\mathbb{N}_0}.$$

3) Die Funktion $x \mapsto \sin(x)$ ist in blau gezeichnet:



4) Nun kommen die Taylorpolynome erster Ordnung (rot) und dritter Ordnung (grün) dazu:



5) Die Näherung dritter Ordnung ist genauer als die Näherung erster Ordnung.

6) Wie schon in Teilaufgabe 1) verwendet ist der Sinus gegeben durch eine Potenzreihe. Laut dem Satz über die gleichmässige Konvergenz der Taylorreihe gegen Limes einer Potenzreihe aus der Vorlesung konvergiert die Taylorreihe vom Sinus also gleichmässig im Intervall $\overline{B}^1_\rho(x_0)$ wobei der Konvergenzradius ρ in diesem Fall unendlich und $x_0 = 0$ ist. Also konvergiert die Taylorreihe insbesondere auf dem Intervall $[-1, 1]$ gleichmässig gegen den Sinus.

7) Wir schreiben den Sinus als Taylorpolynom dritten Grades plus den Restterm.

$$\sin(x) = T^3_{\sin,x_0=0} + R^3_{\sin,x_0=0} = x - \frac{x^3}{6} + R^3_{\sin,x_0=0}.$$

Da der Sinus vier mal differenzierbar ist existiert nach dem Satz von Taylor ein $\xi \in (x_0, x) \subseteq (0, \infty)$, sodass

$$R^3_{\sin,x_0=0} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^4 = \frac{\sin(\xi)}{24}x^4.$$

Einsetzen in die vorherige Gleichung ergibt die gewünschte Identität

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin(\xi)}{24}x^4.$$

8) Durch umformen der Gleichung aus Teilaufgabe 7) erhalten wir

$$\left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| = \left|\frac{\sin(\xi)}{24}x^4\right| \leq \left|\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{\sin(\xi)}{24}x^4\right| = \left|\frac{1}{24}x^4\right| = \frac{x^4}{24}.$$

9) Wir nehmen das Resultat aus Teilaufgabe 8) und setzen den Wert $x = 1$ ein.

$$\frac{1}{24} = \frac{1^4}{24} \geq \left|\sin(1) - 1 + \frac{1^3}{6}\right| = \left|\sin(1) - \frac{5}{6}\right|.$$

10) Wir wählen $\delta = 24\varepsilon$. Dann gilt nach dem Resultat aus Teilaufgabe 8), dass

$$\left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \frac{x^4}{24} \leq \frac{\delta|x|^3}{24} = \varepsilon|x|^3$$

wobei in der zweiten Abschätzung verwendet wurde, dass $|x| \leq \delta$.

11) Wir erinnern uns an die Definition der Konvergenz einer Funktion $f : X \to Y$ an der Stelle x_0 gegen den Grenzwert A:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in X : |x - x_0| \leq \varepsilon \implies |f(x) - A| \leq \delta.$$

Wir behaupten, dass $A = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta = 24\varepsilon$.

(d)

$$\begin{aligned} T^2_{\sin,x_0=\frac{\pi}{2}} &= \sum_{k=0}^{2} \frac{\sin^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{0!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^0 + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^1 + \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

(e) Die Ableitungen von f sind egeben durch

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= e^{x^2}, & f^{(0)}(0) &= 1 \\ f^{(1)}(x) &= 2xe^{x^2}, & f^{(1)}(0) &= 0 \\ f^{(2)}(x) &= 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}, & f^{(2)}(0) &= 2. \end{aligned}$$

Also ist das Taylorpolynom

$$\begin{aligned}
T^2_{f,x_0=0} &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k \\
&= \frac{f(0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 \\
&= 1 + 0 + x^2 \\
&= 1 + x^2.
\end{aligned}$$

10.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 3 der Funktion f im Punkt 0?

$$f(x) := xe^x$$

(i) $x + x^2 + x^3$

(ii) $1 + x + x^2 + x^3$

(iii) $x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$

(iv) $1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$

(b) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion f im Punkt 1?

$$f(x) := x\log(x)$$

(i) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4$

(ii) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4$

(iii) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4$

(iv) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{3}(x-1)^4$

(c) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion f im Punkt 1?

$$f(x) := x\log(x)^4$$

(i) 0

(ii) $(x-1)^2$

(iii) $(x-1)^3$

(iv) $(x-1)^4$

Lösung.

(a) (iii)

(b) (i)

(c) (iv)