Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (∗) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

Die folgende Aufgabe wurde schon in Übungsserie 10 gestellt. In der Zwischenzeit haben wir in der Vorlesung den ganzen Stoff behandelt, der in dieser Aufgabe verwendet wird.

11.1. Taylorpolynom, Restglied, Taylorreihe, Abschätzung des Fehlers

(a) Wir betrachten das Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1 + x + x^2 + x^3$.

1) (∗) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^m_{f,x_0=0}$ von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$, für $m = 0, \dots, 4$.
2) Berechnen Sie das Restglied $R^{m=1}_{f,x_0=0}$.
3) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

(b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Polynom

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

1) Berechnen Sie $T^m_{f,x_0=0}$, das Taylorpolynom von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.
2) Berechnen Sie das Restglied $R^m_{f,x_0=0}$.
3) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

(c)
1) (∗) Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ berechnen Sie das Taylorpolynom $T^m_{\sin,x_0=0}$.

   Tipp: Verwenden Sie, dass $\sin = \operatorname{Sin}|_{\mathbb{R}}$ und dass $\operatorname{Sin}|_{\mathbb{R}}$ der punktweise Limes einer Potenzreihe ist.
2) (∗) Bestimmen Sie die Taylorreihe von sin zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.
3) Zeichnen Sie sin auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
4) Zeichnen Sie $T^1_{\sin,0}$ und $T^3_{\sin,0}$.
5) Was können Sie über den Fehler der Taylornäherung in diesem Beispiel aus Ihrer Zeichnung ablesen?
6) (∗) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von sin zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ gleichmässig gegen sin konvergiert.

   Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (gleichmässige Konvergenz der Taylorreihe gegen Limes einer Potenzreihe).

7) **(∗)** Zeigen Sie, dass es für jedes $x \in]0,\infty[$ einen Punkt $\xi \in]0,\infty[$ gibt, sodass

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin \xi}{24} x^4.$$

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Satz von Taylor, Restglied in Lagrangeform).

8) **(∗)** Zeigen Sie, dass der Fehler der Taylornäherung für sin dritter Ordnung um $x_0 = 0$, also das Restglied $R^3_{\sin,x_0=0}(x) = \sin x - T^3_{\sin,x_0=0}(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, die folgende Abschätzung erfüllt:

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \frac{x^4}{24}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

9) Zeigen Sie, dass die Zahl $\frac{5}{6}$ den Wert $\sin 1$ mit einer Genauigkeit von mindestens $\frac{1}{24}$ nähert, d. h.

$$\left|\sin 1 - \frac{5}{6}\right| \leq \frac{1}{24}.$$

10) Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon \in]0,\infty[$ ein $\delta \in]0,\infty[$ gibt, sodass gilt:

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \varepsilon |x|^3, \qquad \forall x \in [-\delta, \delta].$$

Tipp: Teilaufgabe 8) 8)

Bemerkung: Das bedeutet, dass $T^3_{\sin,x_0=0}$ die Funktion sin in dritter Ordnung um $x_0 = 0$ nähert.

11) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^3}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(d) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^2_{\sin,x_0=\frac{\pi}{2}}$.

(e) Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{x^2}$. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^2_{f,x_0=0}$.

Lösung.

(a) 1)

$$\begin{aligned}
T^0_{f,x_0=0} &= f(x_0) = 1 \\
T^1_{f,x_0=0} &= f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) = 1 + 1(x-0) = 1+x \\
T^2_{f,x_0=0} &= f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 \\
&= 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2}2(x-0)^2 = 1 + x + x^2 \\
T^3_{f,x_0=0} &= f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 \\
&= 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2}2(x-0)^2 + \frac{1}{6}6(x-0)^3 = 1 + x + x^2 + x^3 \\
T^4_{f,x_0=0} &= f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 \\
&+ \frac{1}{4!}f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^4 \\
&= 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2}2(x-0)^2 + \frac{1}{6}6(x-0)^3 + \frac{1}{24}0(x-x_0)^4 \\
&= 1 + x + x^2 + x^3.
\end{aligned}$$

2)

$$R^{m=1}_{f,x_0=0} = f - T^1_{f,x_0=0} = 1 + x + x^2 + x^3 - (1+x) = x^2 + x^3.$$

3) Für $k > 3$ ist $f^{(k)}(x) = 0$. Wir haben also, dass

$$T_{f,x_0=0} = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\bullet - x_0)^k\right)_{m\in\mathbb{N}_0} = \left(\sum_{k=0}^{\min\{m,3\}} \bullet^k\right)_{m\in\mathbb{N}_0}.$$

(b) 1) Die k-te Ableitung von f ist (nach Aufgabe 2) gegeben durch

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} a_i x^{i-k}.$$

Für $i > n$ resultiert das in der leeren Summe und die Ableitung nimmt den Wert 0 an. Evaluieren bei $x_0 = 0$ gibt

$$f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(0) = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} a_i 0^{i-k} = \begin{cases} k! a_k & \text{wenn } k \leq n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beim Einsetzen in die Formel für das Taylorpolynom gibt es daher auch eine Fallunterscheidung und wir bekommen

$$T^m_{f,x_0=0} = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m} \frac{k! a_k}{k!} x^k & \text{wenn } m \leq n \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{k! a_k}{k!} x^k & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies lässt sich weiter zusammenfassen als

$$T^m_{f,x_0=0} = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} a_k x^k.$$

2)

$$R^m_{f,x_0=0} = f - T^m_{f,x_0=0} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} a_k x^k = \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{n} a_k x^k.$$

3)

$$T_{f,x_0=0} = \left(\sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} a_k \bullet^k \right)_{m \in \mathbb{N}_0}$$

(c) 1) Nach dem Beispiel in der Vorlesung ist das Taylorpolynom m-ter Ordnung einer Potenzreihe gegeben durch die ersten m Terme der Potenzreihe. Da wir haben, dass

$$\sin(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

mit

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} & \text{für } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

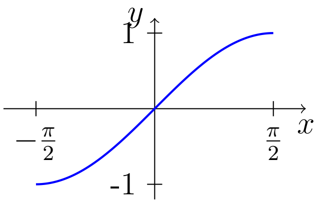
Das Taylorpolynom ist also gegeben durch

$$T^m_{\sin,x_0=0} = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k.$$

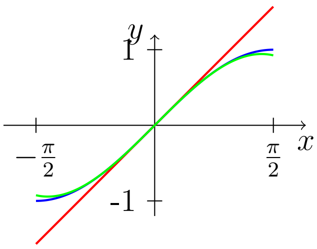
2) Die Taylorreihe ist die Folge von Taylorpolynomen und somit

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k \right)_{m \in \mathbb{N}_0}.$$

3) Die Funktion $x \mapsto \sin(x)$ ist in blau gezeichnet:



4) Nun kommen die Taylorpolynome erster Ordnung (rot) und dritter Ordnung (grün) dazu:



5) Die Näherung dritter Ordnung ist genauer als die Näherung erster Ordnung.

6) Wie schon in Teilaufgabe 1) verwendet ist der Sinus gegeben durch eine Potenzreihe. Laut dem Satz über die gleichmässige Konvergenz der Taylorreihe gegen Limes einer Potenzreihe aus der Vorlesung konvergiert die Taylorreihe vom Sinus also gleichmässig im Intervall $\overline{B}^1_\rho(x_0)$ wobei der Konvergenzradius ρ in diesem Fall unendlich und $x_0 = 0$ ist. Also konvergiert die Taylorreihe insbesondere auf dem Intervall $[-1, 1]$ gleichmässig gegen den Sinus.

7) Wir schreiben den Sinus als Taylorpolynom dritten Grades plus den Restterm.

$$\sin(x) = T^3_{\sin,x_0=0} + R^3_{\sin,x_0=0} = x - \frac{x^3}{6} + R^3_{\sin,x_0=0}.$$

Da der Sinus vier mal differenzierbar ist existiert nach dem Satz von Taylor ein $\xi \in (x_0, x) \subseteq (0, \infty)$, sodass

$$R^3_{\sin,x_0=0} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^4 = \frac{\sin(\xi)}{24}x^4.$$

Einsetzen in die vorherige Gleichung ergibt die gewünschte Identität

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin(\xi)}{24}x^4.$$

8) Durch umformen der Gleichung aus Teilaufgabe 7) erhalten wir

$$\left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| = \left|\frac{\sin(\xi)}{24}x^4\right| \leq \left|\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{\sin(\xi)}{24}x^4\right| = \left|\frac{1}{24}x^4\right| = \frac{x^4}{24}.$$

9) Wir nehmen das Resultat aus Teilaufgabe 8) und setzen den Wert $x = 1$ ein.

$$\frac{1}{24} = \frac{1^4}{24} \geq \left|\sin(1) - 1 + \frac{1^3}{6}\right| = \left|\sin(1) - \frac{5}{6}\right|.$$

10) Wir wählen $\delta = 24\varepsilon$. Dann gilt nach dem Resultat aus Teilaufgabe 8), dass

$$\left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \frac{x^4}{24} \leq \frac{\delta|x|^3}{24} = \varepsilon|x|^3$$

wobei in der zweiten Abschätzung verwendet wurde, dass $|x| \leq \delta$.

11) Wir erinnern uns an die Definition der Konvergenz einer Funktion $f : X \to Y$ an der Stelle x_0 gegen den Grenzwert A:

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x \in X : |x - x_0| \leq \varepsilon \implies |f(x) - A| \leq \delta.$$

Wir behaupten, dass $A = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta = 24\varepsilon$.

(d)

$$\begin{aligned}
T^2_{\sin,x_0=\frac{\pi}{2}} &= \sum_{k=0}^{2} \frac{\sin^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{0!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^0 + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^1 + \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

(e) Die Ableitungen von f sind egeben durch

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= e^{x^2}, & f^{(0)}(0) &= 1 \\
f^{(1)}(x) &= 2xe^{x^2}, & f^{(1)}(0) &= 0 \\
f^{(2)}(x) &= 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}, & f^{(2)}(0) &= 2.
\end{aligned}$$

Also ist das Taylorpolynom

$$\begin{aligned}T^2_{f,x_0=0} &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k \\ &= \frac{f(0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 \\ &= 1 + 0 + x^2 \\ &= 1 + x^2.\end{aligned}$$

11.2. kritische Punkte, Extremalstellen Wir betrachten die Funktion

$$f : I := \left[-\frac{3}{2}, 3\right] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^3 - 3x.$$

(a) Zeichnen Sie f.

(b) **(∗)** Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Einschränkung von f auf das offene Intervall $\left]-\frac{3}{2}, 3\right[$.

(c) Zeigen Sie, dass f ein Maximum und ein Minimum besitzt.

(d) **(∗)** Bestimmen Sie die Extremalstellen und die Extrema von f.

Hinweis: Die Kandidaten für Extremalstellen sind die Endpunkte von I und die kritischen Punkte von f im Innern von I. (Warum?)

(e) Verbessern Sie Ihre Zeichnung von f.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe (d).

(f) Wir schreiben x_0 für die Stelle, an der f ihr Maximum annimmt. Gilt $f'(x_0) = 0$? Gibt es einen Widerspruch zu einem Satz in der Vorlesung?

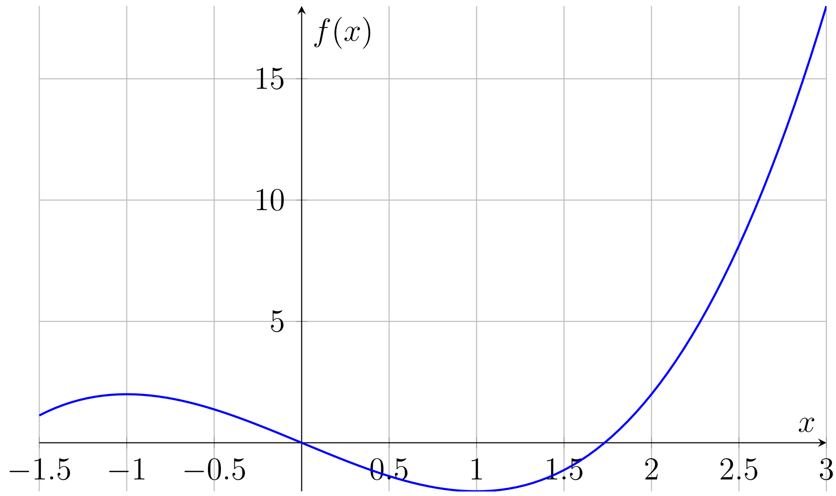
(g) Wir betrachten die Funktion

$$g : I := \left[-2, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad g(x) := x^3 + x^2 - x.$$

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum dieser Funktion.

Hinweis: Gehen Sie wie im Fall der Funktion f vor.

Lösung.

(a) 

(b) Die kritischen Punkte von f erhält man durch die Nullstellen der Ableitung $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 3x\right) = 3x^2 - 3.$$

Setze $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 3 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1.$$

Die kritischen Punkte auf dem Intervall $\left]-\frac{3}{2}, 3\right[$ sind also $x = -1$ und $x = 1$.

(c) Da f auf dem abgeschlossenen Intervall $I = \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$ definiert und stetig ist, existiert nach dem Satz über stetige Funktionen auf kompakten Mengen aus der Vorlesung ein Maximum und Minimum.

(d) Bestimmung der Extremalstellen und Extrema von f:
Wir untersuchen die Funktionswerte an den kritischen Punkten und den Randpunkten:

$$f(-\tfrac{3}{2}) = \left(-\tfrac{3}{2}\right)^3 - 3\left(-\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{27}{8} + \tfrac{9}{2} = \tfrac{9}{8},$$

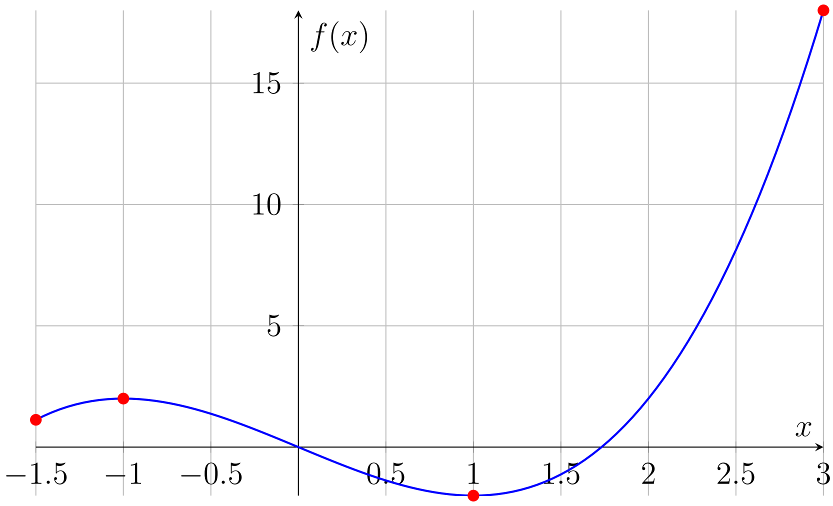
$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2,$$
$$f(1) = 1^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2,$$
$$f(3) = 3^3 - 3(3) = 27 - 9 = 18.$$

Daraus folgt:

- Maximum: $f(3) = 18$ bei $x = 3$,

- Minimum: $f(1) = -2$ bei $x = 1$.

(e) Verbesserte Zeichnung des Graphen unter Berücksichtigung der Extrema:



(f) Das globale Maximum wird bei $x_0 = 3$ angenommen, und hier gilt $f'(3) \neq 0$, da $f'(3) = 3(3^2) - 3 = 24$.
Es gibt keinen Widerspruch zu einem Satz in der Vorlesung. Ein Maximum oder Minimum auf einer *offenen* Menge muss Ableitung Null haben. Da die Menge hier aber nicht offen, sondern abgeschlossen ist und der Punkt auf dem Rand liegt, muss die Ableitung nicht unbeding Null sein um ein Extrema zu sein.

(g) Ableitung:

$$g'(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$

Nullstellen von $g'(x)$ durch Lösung der Gleichung:

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}.$$

Funktionswerte:

$$g(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) = -8 + 4 + 2 = -2,$$
$$g(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) = -1 + 1 + 1 = 1,$$
$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{27},$$
$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}.$$

Maximum: $g(-1) = 1$, Minimum: $g(-2) = -2$.

11.3. lokale Extremalstellen

(a) **($*$)** Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^3 - 3x.$$

Bestimmen Sie die lokalen Maximalstellen von f.

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung und die Lösung zu Aufgabe 11.2(b).

(b) Bestimmen Sie die lokalen Minimalstellen von f.

Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

(c) Ist $x_0 := 1$ eine lokale Extremalstelle von g? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

Lösung.

(a) Wir ermitteln zunächst die kritischen Punkte durch Bestimmung der Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1).$$

Setze $f'(x) = 0$, um die kritischen Punkte zu finden:

$$x = -1 \quad \text{und} \quad x = 1.$$

Um zu bestimmen, ob es sich um lokale Extrema handelt, verwenden wir die zweite Ableitung:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 3) = 6x.$$

- Für $x = -1$:

  $$f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0,$$

  daher hat f bei $x = -1$ ein lokales Maximum.

Die lokale Maximalstelle ist $x = -1$.

(b) Bestimmung der lokalen Minimalstellen von f:

- Für $x = 1$:

  $$f''(1) = 6(1) = 6 > 0,$$

  daher hat f bei $x = 1$ ein lokales Minimum.

Die lokale Minimalstelle ist $x = 1$.

(c) Zuerst berechnen wir die Ableitung $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 3x^2 - 6x + 3.$$

Setze $x = 1$ ein:

$$g'(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 3 = 3 - 6 + 3 = 0.$$

Da $g'(1) = 0$, könnte $x_0 = 1$ eine Extremalstelle sein. Um dies zu prüfen, berechnen wir die zweite Ableitung:

$$g''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 6x + 3) = 6x - 6.$$

Setze $x = 1$ ein:

$$g''(1) = 6(1) - 6 = 0.$$

Da $g''(1) = 0$, müssen wir die dritte Ableitung berechnen:

$$g'''(x) = \frac{d}{dx}(6x - 6) = 6.$$

Setzen wir erneut $x = 1$ ein:

$$g'''(1) = 6.$$

Da die dritte Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$ nicht null ist und $g'''(1) > 0$, folgt aus dem Satz über lokale Extremstellen, dass bei $x = 1$ keine lokale Extremalstelle vorliegt. Die dritte Ableitung weist darauf hin, dass $x = 1$ ein Wendepunkt ist.

11.4. elementares Integral einer Treppenfunktion Wir betrachten die Treppenfunktion

$$\varphi := 2\chi_{]0,3[} - 3\chi_{[2,4]} : I := [0,5] \to \mathbb{R}.$$

(a) Zeichnen Sie φ.

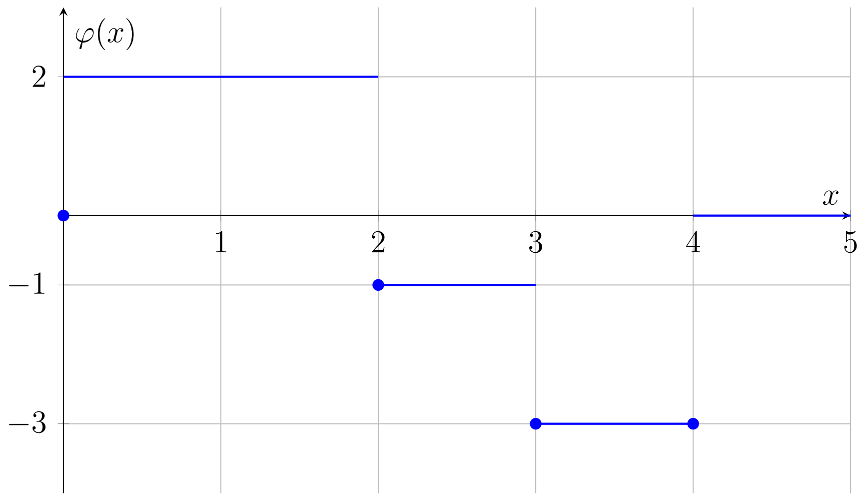
(b) Was ist $\varphi(3)$?

(c) Berechnen Sie $S_I\varphi = S_I(\varphi)$, das elementare Integral von φ über I. (Zur besseren Unterscheidung vom Integral einer allgemeinen Riemann-integrierbaren Funktion nennen wir das Integral einer Treppenfunktion *elementar* und verwenden wir die Notation $S_I\varphi$ dafür.)

Lösung.

(a) Die Funktion χ_A ist die Indikatorfunktion des Intervalls A, die den Wert 1 annimmt, wenn $x \in A$, und den Wert 0 sonst. Die Funktion φ kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 2 & \text{für } x \in]0, 2[, \\ -1 & \text{für } x \in [2, 3[, \\ -3 & \text{für } x \in [3, 4], \\ 0 & \text{für } x \in]4, 5]. \end{cases}$$



(b)

$$\varphi(3) = 2\chi_{]0,3[}(3) - 3\chi_{[2,4]}(3) = 2(0) - 3(1) = -3.$$

(c) φ ist gegeben durch die Treppenfunktion

$$\varphi(x) = 2\chi_{]0,2[}(x) - \chi_{[2,3[}(x) - 3\chi_{[3,4]}(x).$$

Nach der Definition des elementaren Integrals aus der Vorlesung ist

$$S_{I\varphi} = 2|]0, 2[| - |[2, 3[| - 3|[3, 4]| = 2(2) - 1 - 3 = 0.$$

11.5. (eigentliches) Riemann-Integral (∗) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2.$$

Zeigen Sie, dass f eigentlich Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie ihr Riemann-Integral.

Hinweise:

- Gehen Sie wie im Beispiel der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, vor. Dieses Beispiel haben wir in der Vorlesung behandelt.
- Verwenden Sie die Tatsache, dass

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

  Das haben wir in einer Aufgabe in Übungsserie 1 (Induktion) gezeigt.

Lösung. Schritt 1: Definition der Treppenfunktion φ als untere Approximation:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{i-1}{k}\right)^2 \chi_{]x_{i-1},x_i]}(x), \quad \text{mit } x_i = \frac{i}{k}.$$

Dann ist das elementare Integral $S_I\varphi$:

$$S_I\varphi = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{i-1}{k}\right)^2 \frac{1}{k} = \frac{1}{k^3} \sum_{i=1}^{k} (i-1)^2.$$

Die Summe $\sum_{i=0}^{k-1} i^2$ ergibt sich mit der bekannten Summenformel:

$$\sum_{i=0}^{k-1} i^2 = \frac{(k-1)k(2k-1)}{6},$$

also erhalten wir:

$$S_I\varphi = \frac{1}{k^3} \cdot \frac{(k-1)k(2k-1)}{6}.$$

Schritt 2: Definition der Treppenfunktion ψ als obere Approximation:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{i}{k}\right)^2 \chi_{]x_{i-1},x_i]}(x).$$

Das elementare Integral $S_I\psi$ ergibt sich als:

$$S_I\psi = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{i}{k}\right)^2 \Delta x = \frac{1}{k^3} \sum_{i=1}^{k} i^2.$$

Die Summe $\sum_{i=1}^{k} i^2$ ergibt sich ebenfalls mit der bekannten Summenformel:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

also erhalten wir:

$$S_I\psi = \frac{1}{k^3} \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Schritt 3: Grenzwertberechnung und Riemann-Integral:

$$\lim_{k\to\infty} S_I\varphi = \lim_{k\to\infty} \frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{k}}{3} - \frac{1}{6k^2}\right) = \frac{1}{3},$$

und

$$\lim_{k\to\infty} S_I\psi = \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6k^3} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Da die Grenzwerte gleich sind, ist $f(x) = x^2$ Riemann-integrierbar, und wir erhalten:

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}.$$

11.6. Riemann-Integrale, Eigenschaften der Integration Zeigen Sie, dass jede der Funktionen in (a)-(c) eigentlich Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie das eigentliche Riemann-Integral.

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Eigenschaften der Riemann-Integration).

(a) $f := 2\chi_{]0,3[} - 3\chi_{[2,4]} : [0,5] \to \mathbb{R}$

(b) **(∗)** $f : I := [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := -3x^2 + 2x$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 11.5 und ein Beispiel aus der Vorlesung.

(c) **($*$)**

$$f :]0,3[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq 1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

(d) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{-x} \cos x$$

eigentlich Riemann-integrierbar ist und die folgende Abschätzung gilt:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \leq 2\pi.$$

Lösung.

(a) Die gegebene Funktion ist die Treppenfunktion aus Aufgabe 11.4. Dort wurde schon gezeigt, dass ihr eigentliches Integral gegeben ist durch

$$S_{If} = 0.$$

Laut dem Satz über die Eigenschaften der Riemann-Integration gilt für Treppenfunktionen, dass

$$\int_{[0,5]} f(x)\,\mathrm{d}x = S_{If} = 0.$$

(b) Mittels der Linearität der Riemann-Integration bekommen wir

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I (-3x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x = -3 \int_I x^2\,\mathrm{d}x + 2 \int_I x\,\mathrm{d}x = -3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} = 0,$$

wobei die Integrale über x und x^2 aus der Vorlesung und den vorherigen Aufgaben bekannt sind.

(c) Wir nutzen die Gebietsadditivität und bekommen

$$\int_{]0,3[} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{]0,1]} x\,\mathrm{d}x + \int_{]1,3[} (-\frac{1}{4})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(2) = 0.$$

Der Wert vom ersten Integral ist aus der Vorlesung bekannt, und das zweite Integral ist eine Treppenfunktion.

(d) Wir benutzen die Monotonie der Riemann-Integration und zeigen

$$\int_{[0,2\pi]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,2\pi]} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \leq \int_{[0,2\pi]} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi.$$

Die Ungleichung gilt, weil $|\cos x| \leq 1$ und $|e^{-x}| \leq 1$ für $x \geq 0$.

11.7. Linearität der elementaren Integration Seien $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Intervall, $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen und $c \in \mathbb{R}$. Wir schreiben das elementare Integral von φ als $S_I(\varphi)$. Zeigen Sie, dass

$$S_I(c\varphi) = cS_I(\varphi), \tag{1}$$
$$S_I(\varphi + \psi) = S_I(\varphi) + S_I(\psi). \tag{2}$$

Bemerkung: Die Gleichheiten (1,2) bedeuten, dass elementare Integration von Treppenfunktionen eine lineare Abbildung ist. Das gilt sogar für die Integration von allgemeinen Riemann-integrierbaren Funktionen. Das ist Teil eines Satzes aus der Vorlesung.

Lösung. Wir schreiben

$$\varphi = \sum_{J \in \mathcal{R}_1} c_J \chi_J, \quad \psi = \sum_{J' \in \mathcal{R}_2} d_J \chi_J$$

für irgendwelche Kollektionen $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ von Teilintervallen von I und Konstanten $c_J, d_J \in \mathbb{R}$. Offensichtlich ist $c\varphi$ wieder eine Treppenfunktion der Form

$$c\varphi = \sum_{J \in \mathcal{R}_1} cc_J \chi_J.$$

Für das elementare Integral finden wir

$$S_I c\varphi = \sum_{J \in \mathcal{R}_1} cc_J |J| = c \sum_{J \in \mathcal{R}_1} c_J |J| = cS_I\varphi.$$

Die Summe der Treppenfunktionen

$$\varphi + \psi = \sum_{J \in \mathcal{R}_1} c_J \chi_J + \sum_{J \in \mathcal{R}_2} c_J \chi_J$$

ist wieder eine Treppenfunktion. Falls wir die Vereinigung der beiden Kollektionen $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ betrachten und für $J \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ die Konstanten $e_J \in \mathbb{R}$ wie folgt definieren:

$$e_J = c_J \quad \text{falls} \quad J \in \mathcal{R}_1, J \notin \mathcal{R}_2,$$
$$e_J = d_J \quad \text{falls} \quad J \in \mathcal{R}_2, J \notin \mathcal{R}_1,$$
$$e_J = c_J + d_J \quad \text{falls} \quad J \in \mathcal{R}_1, J \in \mathcal{R}_2,$$

dann kann die Summe geschrieben werden als

$$\varphi + \psi = \sum_{J \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} e_J \chi_J.$$

Für das Riemann-Integral finden wir

$$S_I(\varphi + \psi) = \sum_{J \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} e_J |J| = \sum_{J \in \mathcal{R}_1} c_J |J| + \sum_{J \in \mathcal{R}_2} d_J |J| = S_I \varphi + S_I \psi.$$

11.8. nicht Riemann-integrierbare Funktion

Zeigen Sie, dass die Indikatorfunktion

$$f := \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}} : I := [0,1] \to \mathbb{R}$$

beschränkt, aber nicht eigentlich Riemann-integrierbar ist.

Hinweise:

- Zeigen Sie, dass für das untere Riemann-Integral von f gilt:

  $$\underline{\int}_I f \leq 0.$$

  Betrachten Sie dazu eine beliebige Treppenfunktionen φ, sodass $\varphi \leq f$.

- Zeigen Sie analog, dass für das obere Riemann-Integral von f gilt:

  $$\overline{\int}_I f \geq 1.$$

Lösung. Die Indikatorfunktion $\chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ ist offensichtlich beschränkt (es gilt $|\chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}| \leq 1$). Um zu zeigen, dass $\chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ nicht Riemann-integrierbar ist, müssen wir das obere und untere Riemann-Integral betrachten. Sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $\varphi(x) \leq \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Als Treppenfunktion ist φ von der Form

$$\varphi = \sum_{I \in \mathcal{R}} c_I \chi_I$$

für irgendeine Kollektion $\mathcal{R}$ von Intervallen $I \subseteq [0,1]$. Da jedes Intervall I eine irrationale Zahl enthällt, also $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, muss für jedes $I \in \mathcal{R}$ gelten: $c_I \leq 0$. Denn für $x \in I$ mit x irrational gilt

$$c_I = \varphi(x) \leq \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x) = 0.$$

(Um genau zu sein, kann ein Intervall nur rationale Zahlen enthalten, aber nur wenn es aus genau einer Zahl besteht, also wenn $I = \{a\}$ für ein $a \in \mathbb{Q}$. Da solche Intervalle die Länge Null haben, $|\{a\}| = 0$, tragen sie nicht zum Riemann-Integral bei und wir ignorieren sie.) Das elementare Integral der Treppenfunktion φ erfüllt also

$$S_{[0,1]}\varphi = \sum_{I \in \mathcal{R}} c_I |I| \leq 0.$$

Da dies für jede Treppenfunktion mit $\varphi \leq \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ gilt, finden wir für das untere Riemann-Integral:

$$\underline{\int}_{[0,1]} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\, dx = \sup\Big\{ S_{[0,1]}\varphi \,\big|\, \varphi \text{ Treppenfunktion mit } \varphi \leq \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \Big\} \leq 0.$$

(Tatsächlich gilt $\underline{\int}_{[0,1]} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\, dx = 0$, da die konstante Funktion mit Wert 0 eine Treppenfunktion ist, die überall kleiner oder gleich $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ ist.)

Sei nun ψ eine Treppenfunktion mit $\psi(x) \geq \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Wir schreiben wieder

$$\psi = \sum_{I \in \mathcal{R}'} d_I \chi_I$$

für eine Kollektion $\mathcal{R}'$ von disjunkten Intervallen $I \subseteq [0,1]$ mit $\cup_{I \in \mathcal{R}'} I = [0,1]$ und irgendwelchen Konstanten d_I. Da jedes Intervall eine rationale Zahl enthält (wir ignorieren wieder Intervalle der Länge Null, siehe Kommentar oben), $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, muss $d_I \geq 1$ gelten für alle $I \in \mathcal{R}'$. Tatsächlich, für $x \in I$ rational:

$$d_I = \psi(x) \geq \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) = 1.$$

Somit gilt für jede solche Treppenfunktion:

$$S_{[0,1]}\psi = \sum_{I \in \mathcal{R}'} d_I |I| \geq \sum_{I \in \mathcal{R}'} |I| = |[0,1]| = 1.$$

Also finden wir für das obere Riemann-Integral

$$\overline{\int}_{[0,1]} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\, dx = \inf\Big\{ S_{[0,1]}\psi \,\big|\, \psi \text{ Treppenfunktion mit } \psi \geq \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \Big\} \geq 1.$$

(Es gilt sogar $\overline{\int}_{[0,1]} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\, dx = 1$, da die konstante Funktion mit Wert 1 eine Treppenfunktion ist, die überall grösser oder gleich $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ ist.)

Es gilt also

$$\underline{\int}_{[0,1]} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\, dx < \overline{\int}_{[0,1]} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\, dx,$$

also das obere und untere Riemann-Integral stimmen nicht überein und damit ist $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ nicht Riemann-integrierbar.

11.9. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{\cos(x^2)} + \log\Big(\sin(x^3) + 2\Big).$$

Diese Funktion besitzt ein Maximum.

(b) Jede stetige Funktion auf dem Intervall $]0,1[= (0,1)$ besitzt eine Maximum.

(c) Jede Funktion auf dem Intervall $[0,1]$ besitzt eine Maximum.

(d) Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$ ein Punkt, in dem f differenzierbar ist. Der Satz von Fermat über kritische Punkte besagt:

Falls x_0 eine lokale Extremalstelle von f ist, dann ist x_0 ein kritischer Punkt von f.

Gilt die Umkehrung dieses Satzes, d. h. die umgekehrte Implikation?

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Funktion $f : I := [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, und die Treppenfunktion

$$\varphi := \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} \chi_{\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]} : [0,1] \to \mathbb{R}.$$

(e) $\varphi \leq f$.

(f) $\varphi \geq f$.

(g) $S_I(\varphi) \leq \underline{\int}_I f$

(h) $S_I(\varphi) \geq \overline{\int}_I f$

(i) Seien I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass es für jedes $\varepsilon \in]0,\infty[$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $\varphi \leq f \leq \psi$ und $S_I\psi - S_I\varphi \leq \varepsilon$. Dann ist f eigentlich Riemann-integrierbar.

Lösung.

(a) wahr

(b) falsch

(c) falsch

(d) nein

(e) falsch

(f) wahr

(g) falsch

(h) wahr

(i) wahr